

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN
L. SCHMETTERER
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

65. BAND, 3. HEFT
MIT 13 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM JUNI 1961)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I, Mülkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Zeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

65. Band./3. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bompiani, E. Sui tacodi armonici	201
Bottema, O. Die kubischen Raumkurven mit drei gegebenen Tangenten und einer gegebenen Bisekante	209
Fabricsius-Bjerre, Fr. On Strictly Convex Curves and Linear Monotonicity .	213
Godeaux, L. Sur deux congruences associées à une congruence W	220
Hlawka, E. Cremonatransformation von Folgen modulo 1	227
Hornich, H. Eine zusammenhängende Ebene ohne nichtgerade Kurven . .	233
Horninger, H. Zweispurensysteme im projektiven vierdimensionalen Raum	236
Löbell, F. Der Hjelmslevsche Mittelliniensatz und verwandte Sätze . . .	249
Müller, H. R. Die kinematischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum	252
Pinl, M. Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffel- klammern zweiter Art	259
Schaal, H. Ein Beitrag zur konstruktiven Differentialgeometrie	265
Szász, P. On Axioms of Congruence Due to H. G. Forder	270
Varga, O. Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung	277
Vietoris, L. Eine die Stichprobenverteilung betreffende Abschätzung . . .	287
Wunderlich, W. Flächen mit ebenen Falllinien	291

Sui tacnodi armonici

Nota di

E. Bompiani, Roma

Al Prof. E. Kruppa per il suo 75^o compleanno

(Ricevuto il 24 ottobre 1960)

1. Oggetto della ricerca

Questa Nota ha per scopo di approfondire l'esame di un tacnodo armonico di una curva algebrica piana.

Com'è noto la nozione di *tacnodo armonico* si ricollega a quella di invariante di contatto (che vale in tal caso — 1) fra curve piane aventi contatto del 1^o ordine in un punto dovuta a R. Mehmke (1); essa è stata introdotta da E. Wölffing (2), col nome di *tacnodo simmetrico*, e da C. Segre con quello, ormai stabilizzatosi, di *tacnodo armonico* (3): C. Segre ne ha fatto uso nello studio della curva parabolica di una superficie (in S_3) (4).

La nozione di contatto armonico di due curve in un punto, o di tacnodo armonico per i due rami lineari (e li supporremo non di flesso) per il tacnodo, concerne gli elementi differenziali del 2^o ordine, E^2 , delle curve nel punto.

Mi sono servito altre volte (durante corsi di lezioni) di un'altra definizione del contatto armonico basata sopra un teorema (qui dato al n. 2) secondo il quale un E^2 è trasformato nell' E'^2 a contatto armonico con esso da tutte le omologie armoniche che hanno per asse la tangente comune.

Questa definizione permette di proseguire nell'esame di elementi differenziali più elevati. Precisamente si trova che dati due E^3 per i due E^2 a contatto armonico essi sono scambiati da ∞^1 delle omologie precedenti aventi i centri sopra una retta ben determinata per il punto di contatto, retta che a sua volta determina un punto sulla tangente.

Ancora due E^4 sono scambiati da una delle omologie precedenti; e qui si presentano due casi distinti secondo che le due coniche definite

dagli E^4 non hanno (caso generale) o hanno (caso speciale) una tangente comune per il punto trovato sulla tangente.

Nel caso generale è fissato un riferimento dagli E^4 e quindi si possono contare gli invarianti proiettivi di una C^m a tacnodo armonico.

Nel caso speciale bisogna ricorrere per far ciò agli E^5 se non tutt'e due i rami sono sestattici: e in generale bisogna considerare l'ordine di contatto dei rami con le coniche definite dagli E^4 per avere una completa distinzione proiettiva in tipi.

Se l'omologia armonica esistente tra gli E^4 si estende agli E^5 , E^6 , ... si avranno tipi di tacnodi che potranno dirsi *bi-armonici*, *3-armonici*, etc.

2. Contatto armonico — Esame degli E^3

Convieni introdurre la nozione di contatto armonico fra due E^2 di un medesimo piano proiettivo aventi centro comune e la stessa tangente ivi col teorema seguente:

Assegnato un E^2 le ∞^2 omologie armoniche che hanno per asse la tangente all' E^2 trasformano questo nell' E'^2 che ha con esso contatto armonico.

La verifica è immediata. Se l' E^2 è rappresentato (in un dato riferimento che assegni ad un punto del piano le coordinate x, y, t) da

$$y = \alpha_0 x^2 + [3] \quad t = 1 \quad (5) \quad (2.1)$$

per effetto dell'omologia armonica di asse $y = 0$ e centro $(x_0, y_0, 1)$ con $y_0 \neq 0$

$$x = x' - 2 \frac{x_0}{y_0} y', \quad y = -y', \quad t = t' - \frac{2}{y_0} y' \quad (2.2)$$

l' E^2 viene mutato nell'altro (quali si siano x_0, y_0)

$$y' = -\alpha_0 x'^2 + [3], \quad t' = 1 \quad (2.3)$$

e ciò prova l'asserto.

Se si considera un E^3

$$y = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x^3 + [4], \quad t = 1 \quad (2.4)$$

la stessa omologia lo muta in un E'^3

$$y' = \alpha_0' x'^2 + \alpha_1' x'^3 + [4] \quad t' = 1 \quad (2.5)$$

ove

$$\alpha_0' = -\alpha_0, \quad \alpha_1' = -4 \frac{x_0}{y_0} \alpha_0^2 - \alpha_1 \quad (2.6)$$

Si consideri ora una curva algebrica C^m necessariamente d'ordine $n \geq 4$, con tangente $y = 0$ in $(0, 0, 1)$

$$y^2 = 3 A_{12} x y^2 + A_{03} y^3 + A_{40} x^4 + 4 A_3 x^3 y + 6 A_{22} x^2 y^2 + \\ + 4 A_{13} x y^3 + A_{04} y^4 + A_{50} x^5 + 5 A_4 x^4 y + \dots \quad (2.7)$$

Indicati i due E^3 per il tacnodo con

$$y = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x^3 + [4], \quad y = \bar{\alpha}_0 x^2 + \bar{\alpha}_1 x^3 + [4], \quad t = 1$$

si ha

$$\alpha_0^2 = A_{40}, \quad \bar{\alpha}_0 = -\alpha_0 \\ 2 \alpha_0 \alpha_1 = 3 A_{12} A_{40} + 4 A_{31} \alpha_0 + A_{50} \\ - 2 \alpha_0 \bar{\alpha}_1 = 3 A_{12} A_{40} - 4 A_{31} \alpha_0 + A_{50}$$

da cui

$$\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 = 4 A_{31}$$

Tenuto conto della seconda 2.6 i due E^3 riescono uno trasformato dell'altro in tutte le omologie armoniche 2.2 per cui

$$\frac{x_0}{y_0} = - \frac{A_{31}}{A_{40}}$$

cioè: *Gli E^3 della curva C^n per il tacnodo armonico sono trasformati l'uno nell'altro dalle ∞^1 omologie armoniche di asse $y = 0$ che hanno i centri sopra una retta ben determinata.*

Del resto due E^3 con lo stesso centro e tangente (anche se i loro E^2 non sono a contatto armonico) definiscono sempre una retta covariante. Infatti ogni E^3 definisce una proiettività fra la punteggiata su una tangente e il fascio di rette per il centro (in cui al centro corrisponde la tangente). Il prodotto di una proiettività per l'inversa dell'altra è una proiettività nel fascio che ha per rette unite la tangente e un'altra retta (covariante). Nel caso degli E^2 a contatto armonico questa è luogo dei centri delle ∞^1 omologie armoniche che trasformano gli E^3 l'uno nell'altro.

Se si assume questa retta covariante come $x = 0$ e il punto ad essa corrispondente nelle proiettività dette come $(1, 0, 0)$ si ha

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 = 0, \quad A_{31} = 0, \quad 3 A_{12} A_{40} + A_{50} = 0. \quad (2.8)$$

3. Esame degli E^4

Se si passa agli E^4 , cioè alle coniche a contatto 5-punto coi due rami tacnodali, scelta come $t = 0$ la tangente da $(1, 0, 0)$ ad una di esse, quelli si potranno scrivere

$$y = \alpha_0 x^2 + [5], \quad y = -\alpha_0 x^2 + \bar{\alpha}_2 x^4 + [5], \quad t = 1 \quad (3.1)$$

Rimane anche determinata la tangente da $(1, 0, 0)$ alla seconda conica ($\supset$ il secondo E^4)

$$\alpha_0^2 t = \bar{\alpha}_2 y$$

E' sempre $\alpha_0 \neq 0$; se $\bar{\alpha}_2 \neq 0$ si può prendere il punto unità in una delle intersezioni della tangente ora detta con la prima conica e si ha per i due E^4

$$y = x^2 + [5], \quad y = -x^2 + x^4 + [5], \quad t = 1. \quad (3.2)$$

Se invece $\bar{\alpha}_2 = 0$ le due coniche sono bitangenti nei punti $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ e a contatto armonico e per i due E^4 si ha

$$y = \alpha_0 x^2 + [5], \quad y = -\alpha_0 x^2 + [5], \quad t = 1. \quad (3.3)$$

Se i rami tacnodali contengono E^4 del tipo 3.2 il tacnodo armonico si dirà *generale*, nel caso opposto *speciale*.

Nel caso degli elementi 3.2 si vede, facendo ricorso alle 2.2 per $x_0 = 0$, che v'è una omologia, di centro $(0, 2, 1)$, fra quelle considerate che scambia i due E^4 : il suo centro è il coniugato armonico del centro $(0, 0, 1)$ degli E^4 sulla retta covariante $x = 0$ rispetto alla intersezione di questa con le tangenti (diverse da $y = 0$) alle due coniche da $(1, 0, 0)$.

In questo caso tutto il riferimento è determinato (in due modi).

Nel caso degli elementi 3.3 (in cui non è determinato il punto unità daglio E^4) esiste pure un'omologia armonica che scambia i due E^4 : il suo centro è nel punto $(0, 1, 0)$ intersezione della retta covariante $x = 0$ con la tangente $t = 0$ comune alle due coniche (e diversa da $y = 0$) per $(1, 0, 0)$.

Se ora si ritorna all'equazione 2.7 di C^m affinché ad essa appartengano gli E^4 3.2 devono essere soddisfatte le condizioni 2.8 von $A_{40} = 1$ e

$$6 A_{22} + A_{60} + 1 = 0, \quad A_{03} + 5 A_{41} - 1 = 0 \quad (3.4)$$

Riordinando i termini dell'equazione 2.7 e tenendo conto delle condizioni precedenti essa si scrive:

$$\begin{aligned} (y - x^2)(y + x^2 - y^2) = & (A x + B y + C x^2)(y^2 - x^4) + \\ & + y^3 Y_1(x, y) + y^2 Y_3(x, y) + y Y_5(x, y) + \\ & + Y_7(x, y) + \dots + Y_n(x, y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

le $Y_i(x, y)$ essendo forme arbitrarie di grado i e A, B, C costanti arbitrarie.

Sia C^m una curva piana con tacnodo armonico. I due E^3 per il tacnodo determinano una retta per esso (luogo dei centri delle omologie armoniche che scambiano i due E^3) e un punto sulla tangente tacnodale. Se si considerano i due E^4 tacnodali e le coniche che li contengono se le tangenti a

queste dal punto della tangente tacnodale (e diverse da questa) sono distinte è determinato dagli E^4 un riferimento rispetto al quale la C^n ha un'equazione del tipo 3.5.

Esiste una ben determinata omologia armonica che scambia i due E^4 tacnodali, il cui centro è, sulla retta invariante per il tacnodo, il coniugato armonico del tacnodo rispetto alle due tangenti condotte dal punto invariante sulla tangente tacnodale alle due coniche.

Il numero degli invarianti di una tale C^n ($n \geq 4$) è

$$\frac{n(n+3)}{2} - 12.$$

4. Tacnodo biarmonico generale

Una ulteriore particolarità proiettiva del tacnodo armonico nel caso in esame si ha se l'omologia armonica esistente fra i due E^4 scambia anche i due E^5 tacnodali.

Cominciamo con l'osservare che i due E^5

$$y = x^2 + \alpha_3 x^5 + [6], \quad y = -x^2 + x^4 + \alpha_3 x^5 + [6], \quad t = 1$$

appartengono alla C^n 3.5 se e solo se

$$\alpha_3 - \bar{\alpha}_3 = -A + Y_3(1, 0) + Y_7(1, 0)$$

$$\alpha_3 + \bar{\alpha}_3 = A + Y_1(1, 0) + Y_5(1, 0).$$

D'altra parte è facile verificare che il trasformato del primo E^5 per l'omologia armonica che scambia i due E^4 (di centro $(0, 2, 1)$ e di asse $y = 0$) è

$$y = -x^2 + x^4 - \alpha_3 x^5 + [6]$$

ciò porta che tale omologia scambia i due E^5 dati se e solo se $\alpha_3 + \bar{\alpha}_3 = 0$, cioè

$$A + Y_1(1, 0) + Y_5(1, 0) = 0.$$

Un tacnodo armonico dotato di questa particolarità si potrà dire *biarmonico*.

Poichè $\alpha_3 = 0$ (o $\bar{\alpha}_3 = 0$) indica che il primo (o il secondo) E^5 è sestattico (cioè ha conica iperosculatrice) ne segue che: *Se in un tacnodo biarmonico uno de gli E^5 è sestattico lo è anche l'altro.*

In particolare una C^4 con tacnodo biarmonico (essendo $A = 0$, $Y_5(x, y) \equiv 0$, quindi $Y_1(1, 0) = 0$ cioè $Y_1(x, y) \equiv My$) può sempre scriversi

$$(y - x^2)(y + x^2 - y^2) = M y^4.$$

Naturalmente si può elevare la proprietà di armonicità esigendo che i due E^s tacnodali con $s \geq 5$ siano trasformati uno nell'altro mediante un'omologia armonica.

5. Tacnodo armonico speciale

Passiamo ora a completare il caso in cui le tangenti dal punto individuato sulla tangente tacnodale alle due coniche considerate coincidano. In questo caso è individuato un trilatero di riferimento (ma non il punto unità): il vertice opposto alla tangente tacnodale è il centro dell'omologia armonica che scambia i due E^4 . In un riferimento con quel trilatero l'equazione di C^m è del tipo

$$\begin{aligned} y^2 - A_{40} x_2 = & (A x + B y + C x^2)(y^2 - A_{40} x_2) + \\ & + y^3 Y_1(x, y) + y^2 Y_3(x, y) + y Y_5(x, y) + \\ & + Y_7(x, y) + \dots + Y_n(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

(con $A_{40} = \alpha_0^2$).

Poichè gli E^4 non bastano ad individuare il riferimento bisognerà prendere in esame gli E^5 :

$$y = \alpha_0 x^2 + \alpha_3 x^5 + [6], \quad y = -\alpha_0 x^2 + \bar{\alpha}_3 x^5 + [6], \quad t = 1. \quad (5.2)$$

Questi appartengono alle cubiche (per $\alpha_3 \neq 0$, $\bar{\alpha}_3 \neq 0$)

$$y = \alpha_0 x^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0^2} x y^2, \quad y = -\alpha_0 x^2 + \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_0^2} x y^2 \quad (5.3)$$

geometricamente definite dall'avere ciascun vertice del riferimento come tangenziale di un altro.

Gli E^2 della prima cubica di centri $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sono

$$t = -\frac{\alpha_3}{\alpha_0^3} y^2 + [3], \quad x = 1, \quad x = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_3} t^2 + [3], \quad y = 1 \quad (5.4)$$

e quelli della seconda

$$t = \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_0^3} y^2 + [3], \quad x = 1, \quad x = \frac{\alpha_0^2}{\bar{\alpha}_3} t^2 + [3], \quad y = 1 \quad (5.5)$$

da cui intanto si deduce che $\bar{\alpha}_3/\alpha_3$ è un invariante di C^m relativo al tacnodo; e che per il valore $+1$ di esso ($\bar{\alpha}_3 = +\alpha_3$) le due C^3 hanno contatto del 2° ordine in $(0, 1, 0)$ e contatto armonico in $(1, 0, 0)$; mentre per il valore -1 (cioè $\bar{\alpha}_3 = -\alpha_3$) si ha contatto del 2° ordine in $(1, 0, 0)$ e contatto armonico in $(0, 1, 0)$.

Il caso in cui l'invariante sia 0 o ∞ porta ad $\bar{\alpha}_3 = 0$ ovvero $\alpha_3 = 0$ e una o l'altra delle due cubiche si spezza; il relativo E^5 è sestattico.

Se p. es. $\alpha_3 \neq 0$ la conica osculatrice alla prima cubica in $(1, 0, 0)$ è $\alpha_0^3 x t + \alpha_3 y^2 = 0$; prendendo il punto unità in una delle intersezioni di essa con la conica definita dall' E^4 di E^5 : $y t = \alpha_0 x^2$ (e una delle intersezioni $\neq (0, 0, 1)$ è certo reale) si ha $\alpha_0 = 1$, $\alpha_3 = -1$.

Esamineremo poi il caso $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = 0$.

Con la scelta $\alpha_0 = 1$, $\alpha_3 = -1$ tutto il riferimento è fissato e affinché i due E^5

$$y = x^2 - x^5 + [6], \quad y = -x^2 + \bar{\alpha}_3 x^5 + [6], \quad t = 1$$

appartengano alla C^n 5.1, essendo $A_{40} = 1$, dev'essere

$$Y_1(1, 0) + Y_5(1, 0) = \bar{\alpha}_3 - 1$$

$$Y_3(1, 0) + Y_7(1, 0) = -\bar{\alpha}_3 - 1$$

Per una C^4 , poichè $Y_3(x, y) \equiv 0$, $Y_5(x, y) \equiv 0$, $Y_7(x, y) \equiv 0$ dev'essere $\bar{\alpha}_3 = -1$, quindi $\bar{\alpha}_3/\alpha_3 = 1$ e $Y_1(1, 0) = -2$.

Tutte le C^4 del tipo in esame hanno come invariante relativo al tacnodo $+1$ e vi sono soltanto ∞^1 tali C^4 proiettivamente distinte. Il fascio individuato da una tale C^4 e dalla tangente tacnodale contata 4 volte le fornisce tutte.

Passando alle C^5 , per cui $Y_5(x, y) \equiv 0$, $Y_7(x, y) \equiv 0$, $\bar{\alpha}_3$ determina $Y_1(1, 0)$ e $Y_3(1, 0)$ sicchè vi sono ∞^7 C^5 proiettivamente distinte del tipo considerato; esse si possono rappresentare nella forma

$$(y + x^2)(y - x^2 + y^2 x) = \{(A x + B y)(y + x^2) + \bar{\alpha}_3 x y^2\}(y - x^2) + y^3(a y + b x^2 + c x y + d y^2)$$

che mette in evidenza una base del sistema lineare ∞^7 .

Analogamente si vede che le C^6 proiettivamente distinte formano un sistema lineare ∞^{14} ; e in generale per ogni $n \geq 4$ un sistema lineare di dimensione

$$\frac{n(n+3)}{2} - 13.$$

Aggiungiamo che se $\bar{\alpha}_3 = -\alpha_3$ cioè $\bar{\alpha}_3/\alpha_3 = -1$, l'omologia armonica che scambia fra loro gli E^4 tacnodali si estende agli E^5 ; cioè si ha un tipo di tacnodo biarmonico per il caso ora considerato (in cui le coniche degli E^4 hanno la stessa tangente, oltre $y = 0$, per il punto invariante della tangente tacnodale).

6. Tacnodo armonico con rami sestattici

Rimane da considerare il caso $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = 0$ cioè di due E^6

$$y = \alpha_0 x^2 + \alpha_4 x^6 + [7], \quad y = -\alpha_0 x^2 + \bar{\alpha}_4 x^6 + [7], \quad t = 1$$

E' chiaro che in questo caso *i due* E^5 *sono sestattici* e le coniche che li contengono sono bitangenti, a contatto armonico, nei punti $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ del riferimento.

Gli E^6 definiscono le cubiche

$$y = \alpha_0 x^2 + \frac{\alpha_4}{\alpha_0^3} y^3, \quad y = -\alpha_0 x^2 + \frac{\bar{\alpha}_4}{\alpha_0^3} y^3, \quad t = 1$$

e ne sono definiti. Esse hanno un flesso in $(1, 0, 0)$ con tangente $t = 0$; e il loro invariante di contatto ivi vale $\bar{\alpha}_4/\alpha_4$. Se questo è $= -1$ l'omologia armonica che scambia gli E^4 scambia anche gli (E^5) e gli E^6 ; e il tacnodo potrebbe dirsi 3-armonico.

Se non sono insieme $\alpha_4 = \bar{\alpha}_4 = 0$, e sia p. es. $\alpha_4 \neq 0$, si può considerare la polare di $(0, 1, 0)$ spezzata nella coppia di rette $t^2 = \frac{3\alpha_4}{\alpha_0^3} y^2$;

servendosi di questa e della conica osculatrice al primo elemento per fissare il punto unità si può fare $\alpha_0 = 1$, $\alpha_2 = \pm 1$ (i due tipi corrispondenti alle due determinazioni di α_4 sono distinti dal punto di vista reale).

Dopo ciò si potranno esaminare gli invarianti di C^m questo tipo.

Resta poi da esaminare a parte il caso $\alpha_4 = 0$, $\bar{\alpha}_4 = 0$ in cui le coniche osculatrici (determinate dagli E^4) contengono i due E^6 tacnodali. Ed è ormai chiaro come si proceda.

Note

(1) Per un'estesa bibliografia sull'argomento può vedersi una mia: *Geometria degli elementi differenziali*, Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Akademie-Verlag, Berlin 1959.

(2) E. Wölffing: *Über die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Funktion von Ternären Formen*, Math. Ann., Bd. XXXVI, 1890, p. 97—120.

(3) C. Segre: *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principi della teoria di tali curve*, Giorn. di Battaglini, vol. XXXVI, 1898, p. 1—50 (n. 30) e *Opere* (Ediz. Cremonese, Roma, 1957), vol. I, p. 380—429.

(4) C. Segre: *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*, Rend. Lincei, s. V., vol. VI, 1897, p. 168—175 e *Opere* (Edizioni Cremonese, Roma, 1958), vol. II, p. 1—8.

(5) Con la notazione $[s]$, con s intero positivo s'indica qualsiasi funzione che abbia uno zero d'ordine $\geq s$ per $x = 0$.

Die kubischen Raumkurven mit drei gegebenen Tangenten und einer gegebenen Bisekante

Von

O. Bottema, Delft

E. Kruppa zum 75. Geburtstage

(Eingegangen am 15. Juli 1960)

Es gibt ∞^{12} kubische Raumkurven. Da es für eine solche Kurve eine zweifache Bedingung bedeutet, mit einer gegebenen Geraden zwei Schnittpunkte zu haben, und eine dreifache, eine gegebene Gerade zu berühren, so kann man zu drei gegebenen Tangenten l_1, l_2, l_3 und einer gegebenen Bisekante $l_4 \infty^1$ kubische Raumkurven erwarten.

Wenn eine kubische Raumkurve diesen Bedingungen genügt, so wird sie durch eine Raumkollineation, welche die vier Geraden l_i invariant läßt, in eine Kurve übergeführt, die ebenfalls den Bedingungen genügt. Nun gibt es i. a. immer ∞^1 solche Kollineationen: sie haben die Punkte der zwei Transversalen s, s^1 der l_i zu Doppelpunkten und lassen jede Gerade der durch s, s^1 bestimmten linearen Kongruenz invariant. Die Lösungen unserer Aufgabe ordnen sich also in eine oder mehrere Scharen von kubischen Raumkurven und die Kurven einer Schar gehen in einfacher Weise auseinander hervor. Wir wollen diese Scharen näher untersuchen und dabei auch die Realitätsverhältnisse in Betracht ziehen.

2. Sind p_{ij} bzw. p_{ij}' die Linienkoordinaten zweier Geraden l und l' , dann ist $(W) = \sum p_{12} p_{34}'$ eine Invariante des Geradenpaares und ungleich null, wenn l und l' windschief sind. Vier Gerade l_i haben zwei wesentliche absolute Invarianten, nämlich die Verhältnisse der Zahlen

$$U = (l_2 l_3) (l_1 l_4), \quad V = (l_3 l_1) (l_2 l_4), \quad W = (l_1 l_2) (l_3 l_4), \quad (1)$$

die sogenannten *Grassmannschen Doppelverhältnisse*. Sind d und d' die binären Doppelverhältnisse, welche die Geraden l_i auf den Transversalen s und s' bestimmen, dann hat man

$$U : V : W = 1 : d d' : (1 - d) (1 - d'). \quad (2)$$

Vorausgesetzt, daß l_1, l_2, l_3, l_4 nicht hyperboloidische Lage haben, dann bestimmen U, V, W vollständig die projektiven Eigenschaften des Quadrupels l_i . Das heißt: zwei solche Quadrupel sind zu einander projektiv dann und nur dann, wenn sie dieselben Grassmannschen Doppelverhältnisse haben.

3. Um die kubischen Raumkurven zu bestimmen, die drei gegebene Geraden l_1', l_2' und l_3' berühren und eine vierte Gerade l_4' zu Bisekante haben, gehen wir nun folgendermaßen vor: Wir betrachten eine beliebige C_3 und suchen zu ihr drei Tangenten l_1, l_2, l_3 und eine Bisekante l_4 , so daß das Quadrupel (l_i) mit (l_i') projektiv ist; durch jede Kollineation, die (l_i) in (l_i') überführt, geht dann die C_3 in eine Raumkurve über, die eine Lösung unserer Aufgabe ist. Da die kubischen Raumkurven untereinander immer projektiv sind, erhält man auf diese Weise offensichtlich sämtliche Lösungen.

4. Der C_3 geben wir die Gleichungen

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1, \quad (3)$$

wo t ein Parameter ist. Ist m die Bisekante durch die Punkte $t = u_1$ und $t = u_2$, und m' die durch $t = u_3$ und $t = u_4$, dann ist

$$(m \ m') = \begin{vmatrix} u_1^3 & u_1^2 & u_1 & 1 \\ u_2^3 & u_2^2 & u_2 & 1 \\ u_3^3 & u_3^2 & u_3 & 1 \\ u_4^3 & u_4^2 & u_4 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (u_i - u_j). \quad (4)$$

Sind nun l_1, l_2 und l_3 die Tangenten der C_3 in den Punkten $A_i(t = t_i)$ und l_4 die Bisekante durch die Punkte $B_1(t = t')$ und $B_2(t = t'')$, dann finden wir für das Quadrupel l_i :

$$U : V : W = (t_2 - t_3)^4 (t_1 - t')^2 (t_1 - t'')^2 : (t_3 - t_1)^4 (t_2 - t')^2 (t_2 - t'')^2 : (t_1 - t_2)^4 (t_3 - t')^2 (t_3 - t'')^2 \quad (5)$$

oder, wenn wir noch ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t_1 = \infty, t_2 = 0$ und $t_3 = 1$ nehmen und $t' = y_1, t'' = y_2$ setzen:

$$U : V : W = 1 : y_1^2 y_2^2 : (1 - y_1)^2 (1 - y_2)^2. \quad (6)$$

Setzen wir auf der linken Seite die (bekannten) Grassmannschen Doppelverhältnisse des gegebenen Quadrupels (l_i') ein, dann können aus (6) die Zahlen y_1 und y_2 bestimmt werden und somit diejenigen Bisekanten l_4 der C_3 , die mit den Tangenten ein Quadrupel bilden, das zu (l_i') projektiv ist. Aus (6) folgern wir, daß y_1 und y_2 die Wurzeln der Gleichung

$$U^{\frac{1}{2}} y^2 - (U^{\frac{1}{2}} + V^{\frac{1}{2}} - W^{\frac{1}{2}}) y + V^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (7)$$

sind. Mit Rücksicht auf die Zweideutigkeit der Zahlen $U^{\frac{1}{2}}$, $V^{\frac{1}{2}}$ und $W^{\frac{1}{2}}$ gibt es vier wesentlich verschiedene Gleichungen und also auch vier Bisekanten, die unseren Bedingungen genügen. Hieraus folgt: *Es gibt vier Scharen von kubischen Raumkurven, die drei gegebene Geraden berühren und eine vierte gegebene Gerade zur Bisekante haben.*

Wegen $UVW \neq 0$ sind die vier quadratischen Gleichungen (7) und damit auch die vier Kurvenscharen immer von einander verschieden.

5. Wir setzen jetzt voraus, daß die Geraden l_i' reell sind, und fragen nach den reellen Lösungen der Aufgabe. Die Kurve (3) sei jetzt auf ein reelles Koordinatensystem bezogen. Die Tangenten l_1 , l_2 , l_3 sind dann auch reell. Die Bisekante l_4 ist reell, wenn y_1 und y_2 reell oder konjugiert-komplex sind; im letzteren Fall hat die reelle Bisekante zwei imaginäre Schnittpunkte B_1 und B_2 mit der Kurve. In beiden Fällen sind $(y_1 y_2)^2$ und $(1 - y_1)^2 (1 - y_2)^2$ positiv. Aus (6) lesen wir ab: ein Geradenquadrupel, das aus drei reellen Tangenten und einer reellen Bisekante einer reellen kubischen Raumkurve gebildet ist, hat immer positive Grassmannsche Doppelverhältnisse. Sind umgekehrt die Verhältnisse der Zahlen U , V und W positiv, dann haben die (vier) Gleichungen (7) reelle Koeffizienten und die Wurzeln sind entweder reell oder konjugiert-komplex. Wir haben also den Satz: *Wenn l_i' reelle Gerade sind, so gibt es reelle kubische Raumkurven, die l_1' , l_2' , l_3' berühren und l_4' zur Bisekante haben dann und nur dann, wenn die Grassmannschen Doppelverhältnisse des Quadrupels l_i' positiv sind.* Die vier Scharen von Lösungskurven sind dann immer sämtlich reell.

6. Wenn die vier Geraden l_i' konjugiert-imaginäre Transversalen s und s' haben, dann sind die binären Doppelverhältnisse d und d' aus (2) konjugiert-komplex. Das heißt: vier reelle Geraden mit imaginären Transversalen haben positive Grassmannsche Doppelverhältnisse.

Setzen wir jetzt voraus, daß die Transversalen s und s' reell sind; sei P_i der Schnittpunkt von s mit l_i und p_i' jener von s' mit l_i . Dann ist $d = (P_1 P_2 P_3 P_4)$, $d' = (P_1' P_2' P_3' P_4')$. Sind die Verhältnisse von U , V und W positiv, dann ist $dd' > 0$, $(1 - d)(1 - d') > 0$. Durch P_1 , P_2 , P_3 ist auf s , durch P_1' , P_2' , P_3' auf s' eine zyklische projektive Anordnung bestimmt. Offenbar gilt nun: liegt P_4 zwischen P_1 und P_2 , dann P_4' zwischen P_1' und P_2' usw., das heißt die Geraden l_i überkreuzen sich nicht, sie liegen in der Kongruenz (s, s') aufeinanderfolgend. Damit ist für positive Verhältnisse U , V , W eine geometrische Deutung gefunden. Wir haben: *Sind die Grassmannschen Doppelverhältnisse eines Geradenquadrupels l_i positiv, dann gibt es zwei Möglichkeiten; entweder gehören die l*

einer elliptischen oder parabolischen Kongruenz an oder sie liegen in einer hyperbolischen Kongruenz nebeneinander.

7. Wenn die Verhältnisse von U , V und W positiv sind, dann gibt es drei positive Zahlen a , b , c , so daß $U : V : W = a^2 : b^2 : c^2$; die in (7) enthaltenen quadratischen Gleichungen lauten jetzt

$$a y^2 - (a + b - c) y + b = 0, \quad (8)$$

$$a y^2 - (a - b - c) y - b = 0, \quad (9)$$

$$a y^2 - (a - b + c) y - b = 0, \quad (10)$$

$$a y^2 - (a + b + c) y + b = 0, \quad (11)$$

und man sieht sofort, da ihre Diskriminanten positiv sind, daß (9), (10) und (11) reelle ungleiche Wurzeln y_1 und y_2 besitzen. Wir haben also: Von den vier Scharen reeller kubischer Raumkurven, die (wenn die l'_i positive Doppelverhältnisse aufweisen) l'_1 , l'_2 , l'_3 berühren und l'_4 zweimal schneiden, bestehen immer drei aus Kurven, die mit l'_4 reelle Schnittpunkte haben.

Die vierte Schar gehört zur Gleichung (8) mit der Diskriminante

$$\begin{aligned} D &= a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab = \\ &= U + V + W - 2\sqrt{VW} - 2\sqrt{WU} - 2\sqrt{UV}, \end{aligned}$$

wo jetzt die Wurzeln positiv gedacht sind. Für $a = b = c = 1$ ist $D < 0$, für $a = b = 1$, $c = 4$ hat man $D = 0$ und für $a = b = 1$, $c = 5$ ist $D > 0$. Das heißt: die vierte Schar besteht entweder aus Kurven, die l'_4 in zwei verschiedenen reellen Punkten schneiden, oder aus Kurven die auch l'_4 berühren, oder aus solchen, die mit l'_4 zwei konjugiert-imaginäre Punkte gemein haben.

Von Voß rührt der Satz her, daß die Bestimmung einer C_3 aus vier Tangenten eine poristische Aufgabe ist; sie hat im allgemeinen keine Lösung, aber wenn die vier Geraden einer bestimmten Bedingung genügen, gibt es unendlich viele Lösungen. Die Gleichung $D = 0$ stimmt mit der Bedingung von Voß überein.

8. Wir haben gefunden, daß unsere Aufgabe reelle Lösungen hat, wenn U , V und W positive Verhältnisse haben. Diese Bedingung ist für die vier gegebenen Geraden symmetrisch. Daher: wenn es reelle kubische Raumkurven gibt, die l'_1 , l'_2 und l'_3 berühren und l'_4 zur Bisekante haben, dann gibt es auch reelle kubische Raumkurven, die l'_1 , l'_2 und l'_4 berühren und l'_3 zur Bisekante haben, usw.

On Strictly Convex Curves and Linear Monotonicity

By

Fr. Fabricius-Bjerre, Copenhagen

In honour of Prof. E. Kruppa

With 2 Figures

(Received October 31, 1960)

1. The concept of *strict convexity* for space curves has been introduced by *M. Barner* (1). In the n -dimensional projective space a closed n times differentiable curve will be called strictly convex if there exists through any $n - 1$ points of the curve at least one hyperplane having only these points in common with the curve. Two or more points may coincide in which case the multiplicity of the points is counted in a suitable fashion. In particular, a closed curve in the projective plane is called strictly convex if there exists through every point of the curve a line, different from the tangent, having only this point in common with the curve. It may be noted that a usual closed convex curve is not strictly convex (in the sense of the words used here) whereas it may be proved that a closed curve of the 3rd order without double point or cusp is strictly convex.

For this class of curves *Barner* has shown a series of interesting theorems. Thus, a plane strictly convex curve of order p has at least p points of inflection, and an analogous theorem holds for curves in spaces of higher dimensions. *O. Haupt* (4) has extended the concepts to open curves and promised a more geometrical treatment of the problems.

In a recent paper (3) the present author has introduced the concept of *linear monotonicity* for an open curve in the *affine* plane. The curve is called linearly monotone if it has the property that the common points for the curve and an arbitrary line in the plane form the same sequence on the curve and on the line. In (3) it is shown that the strictly convex and the linearly monotone curves are closely related in the

sense that a curve is linearly monotone if and only if it is strictly convex at every ordinary (convex) point, i. e. through each such point a line, different from the tangent, can be drawn having only this point in common with the curve.

In the following we shall extend the concept of linear monotonicity to open and closed curves in the *projective* plane and show, that the class of linearly monotone curves is essentially the same as the class of strictly convex curves.

2. An open or closed curve shall in the following mean the topological image of a segment (including the endpoints), respectively a circle. The curves will be assumed differentiable and oriented.

Let a line l have the points $P_1, P_2, \dots, P_m$, $m \geq 2$, in common with the curve k . The points shall form a sequence agreeing with the orientation of the curve k , allowing any of the points to be the 'first' if k is closed.

By the *chord* belonging to the arc $P_i P_{i+1}$ we shall mean that one of the two segments of l determined by the points P_i and P_{i+1} whose union with the arc $P_i P_{i+1}$ form a closed curve of *even* order. The other segment, called the *prolongation of the chord*, will then together with the arc determine a closed curve of odd order. Any straight line containing an interior point of the chord has at least one point in common with the arc to which the chord belongs.

Now we consider on l all the chords $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{m-1} P_m$ and, for the closed curve, in addition $P_m P_1$. These chords may overlap or cover one another; or any two consecutive have only the endpoint in common whereas two non-consecutive have no point in common. In the last case the chords fill up the segment $P_1 P_m$ or the whole line l depending on whether k is open or closed. We may say that the chords constitute an *open* or *closed polygon of order 1*, situated on the line l .

At this point linear monotonicity is introduced by the following *definition*:

The curve k shall be called *linearly monotone along the line l* if the chords made by k on l constitute an open or closed polygon of order 1. The curve, *as a whole*, is said to be linearly monotone if it is linearly monotone along any line having at least two points in common with the curve.

In order that a curve be linearly monotone it is necessary that an arbitrary straight line has at most finitely many points in common with the curve. Such curves are said to be of *bounded order*.

If k is linearly monotone along the line l then the sequence of points $P_1, P_2, \dots, P_m$ form a monotone sequence on the line l as well as on the curve. This linear monotonicity, produced by the curve, is a necessary, but not sufficient condition that the curve be linearly monotone. As an example we may mention a closed curve of order 4 with two points of inflection. Let a line meet this curve in four points P_1, P_2, P_3, P_4 . These points form the same sequence on the curve and on the line l , but the curve is not linearly monotone along l since the 4 chords $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4$ and $P_4 P_1$ do not fill up the line l , but cover the segment $P_1 P_4$ twice.

The linearly monotone curves cannot contain parts of spirals and should therefore maybe be called "spiral-free" curves.

3. Let k be an oriented curve and $P_i P_{i+1}$ a chord on the line l . On the chord we choose a point P'_i . The 3 points P_i, P'_i and P_{i+1} determine, in this order, an *orientation* of the line l . If k is linearly monotone, all the chords will determine the *same orientation* of l , which coincides with the orientation determined by the sequence of points $P_1, P_2, \dots, P_m$ when $m \geq 3$.

In other words, the linearly monotone curves have the property of producing an orientation of all lines in the plane having two or more points in common with the curve.

4. We now turn to the connection between the linearly monotone and the strictly convex curves. We first prove:

Theorem 4.1. Any strictly convex curve of bounded order is linearly monotone.

Let a line l intersect the strictly convex open or closed curve k in the points $P_1, P_2, \dots, P_m$. We have to show that the chords $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{m-1} P_m, (P_m P_1)$, constitute a polygon of order 1.

The proof of the theorem rests on the following two statements:

Lemma 1. A chord $P_i P_{i+1}$ contains no point of the curve k in its interior.

Lemma 2. Any closed strictly convex curve of bounded order is of odd order.

To verify lemma 1 assume a point Q of the curve were an interior point of the chord $P_i P_{i+1}$. In that case any line through Q would have at least one more point in common with k , viz. a point of the arc $P_i P_{i+1}$, contrary to the strict convexity of the curve. Lemma 2 follows from the fact that there exist lines intersecting the curve in one point only.

Now we return to the proof of theorem 4.1. The point P_3 cannot lie on the chord $P_1 P_2$ according to lemma 1, but must lie on its prolongation. The chord $P_2 P_3$ will then either lie on the prolongation of the chord $P_1 P_2$ or fill up the complementary segment and thus contain the chord $P_1 P_2$. But in this case P_1 would be on the chord $P_2 P_3$. Therefore the chord $P_2 P_3$ is on the prolongation of the chord $P_1 P_2$ and these two chords constitute the segment $P_1 P_3$ which has P_2 as an interior point.

The point P_4 cannot lie on the segment $P_1 P_3$ but must lie on its prolongation. As above we see that $P_3 P_4$ is on the prolongation of the segment $P_1 P_3$.

We continue in this manner until the chord $P_{m-1} P_m$. If k is open it follows that the chords fill up a segment $P_1 P_m$. On the other hand, if k is closed the chord $P_m P_1$ still remains. Either $P_m P_1$ covers $P_1 P_m$ or $P_1 P_m$ and $P_m P_1$ fill up the whole line l . The first mentioned case is impossible as it would imply that k were of even order contrary to lemma 2. — This finishes the proof of the theorem.

5. Next, we shall investigate whether the converse, that a linearly monotone curve is strictly convex, holds. Let k be an open or closed linearly monotone curve and P_0 an interior point of k . Since the curve is of bounded order the tangent at P_0 has only finitely many points in common with the curve. We may therefore choose an arc containing P_0 and having only P_0 in common with the tangent. The point P_0 is an *ordinary* (convex) *point* or a *point of inflection* according as the tangent does not intersect the arc or intersects it.

We then show:

Theorem 5.1. A linearly monotone curve is strictly convex at every ordinary point. (fig. 1.)

Let P_0 denote an ordinary point of the curve k , and t_0 the tangent to k at P_0 . Connect the point P_0 to an arbitrary point P of k . As shown in § 3 the line l through P_0 and P is oriented according to the orientation of k .

The orientation of the set of lines l may be described as follows: Let e denote a conic having P_0 as interior point, and let u be the polar of P_0 with respect to e . The line l intersects e in two points E and E' and the line u in a point U . The two triples of points $P_0 E U$ and $P_0 E' U$ represent the two opposite orientations of l . Let us assume that the orientation of l generated by k may be represented by the triple $P_0 E U$.

We call then E the *point of orientation* for the oriented line l . If we consider the line u to be the line at infinity, then P_0 becomes the center

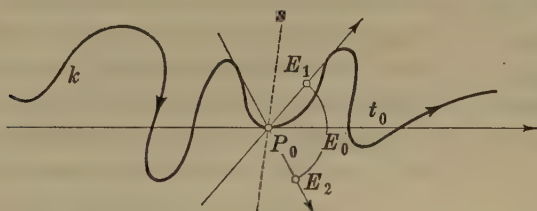


Fig. 1

of e (in fig. 1 and 2 the conic e is drawn as a circle), and the two possible points of orientation for the line l may be said to be diametrically opposite.

Now we shall investigate more closely the set (E) of points of orientation, obtained as P traverses the curve. As P varies continuously on k the point E will vary continuously on e , and the set (E) consists of at most two arcs corresponding to the two arcs of k issuing from P_0 . When P approaches P_0 from the right, then E approaches one of the points of intersection between t_0 , the tangent at P_0 , and e ; this point we call E_0 . If P approaches P_0 from the left, then E approaches E_0 again, but this time from the opposite side on e , since P_0 is assumed to be an ordinary point of k . From this we conclude that the set (E) consists of two arcs E_0E_1 and E_0E_2 such that the arc E_1E_2 has E_0 as interior point. If t_0 has points different from P_0 in common with k , then E_0 is the point of orientation for t_0 , and the two arcs E_0E_1 and E_0E_2 form together one arc E_1E_2 .

Since the set (E) cannot contain diametrically opposite points and since the boundary points E_1 and E_2 are points of orientation, too, it follows that (E) is contained in one of the angular domains bounded by the lines P_0E_1 and P_0E_2 , and consequently the whole curve k is situated in this angular domain. Any line s through P_0 and lying in the complementary angular domain has P_0 and only P_0 in common with k . Hence the curve k is strictly convex at P_0 .

The two boundary lines P_0E_1 and P_0E_2 are tangents to k if k is closed. If k is open, these lines may connect P_0 and the endpoints of k .

In the above proof we have not made use of the fact that the whole curve is assumed to be linearly monotone but only that it is linearly

monotone with respect to the lines through P_0 . Actually we have shown that a curve cannot orient all the lines through a given point, except the tangent. It may happen that a curve does not orient any line through a given point P_0 , e. g. if P_0 is suitably chosen on a spiral.

6. The theorems 4.1 and 5.1 show that the class of strictly convex curves is nearly the same as the class of linearly monotone curves. Fig. 2 shows a curve which is linearly monotone without being strictly convex. The curve ACB consists of two convex arcs AC and BC joined

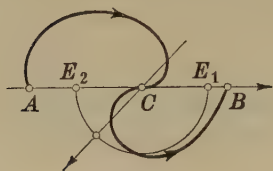


Fig. 2

at the point of inflection C such that the tangent at C passes through the endpoints A and B . At the point C the curve is not strictly convex since every line through C has 3 points in common with the curve. The points of orientation for these lines fill up "half of" the conic e such that E_1 is point of orientation for the tangent at C whereas the diametrically opposite point

E_2 is the limit point of points of orientation for the lines through C converging to the tangent. The orientation of the lines through C thus varies *discontinuously* at the tangent at C .

If we extend *continuously* the orientation of lines having at least two points in common with a linearly monotone curve (and therefore oriented by it) to its tangents as well, then a curve as fig. 2 is ruled out. In that case the set of points of orientation forms a single arc E_1E_2 when P_0 is an ordinary point as well as when P_0 is a point of inflection. The whole curve lies in one angular domain, and the curve is strictly convex at all of its points.

With this extension the two classes of curves coincide.

7. The concept of linear monotonicity may be extended to include oriented curves in projective spaces of 3 or more dimensions. Let a hyperplane H in R^n intersect an oriented curve k in the points $P_1, P_2, \dots, P_m$. The chord $P_i P_{i+1}$ belonging to the arc $P_i P_{i+1}$ is defined, as in the plane, to be the one of the two complementary segments on the line through P_i and P_{i+1} , which together with the arc $P_i P_{i+1}$ forms a closed curve of even order. The curve k is said to be linearly monotone along the hyperplane H if the chords $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{m-1} P_m$ (and possibly $P_m P_1$) form an open (or closed) *polygon of order $n - 1$* .¹ Thus,

¹ For the definition of such polygons, see D. Derry (2).

when $n = 3$, in the usual projective space, the chords in the plane H shall form a polygon of order 2, i. e. in the projective sense an open or closed *convex* polygon. The curve k (in R^n) is then said to be linearly monotone, if it is linearly monotone along any hyperplane H having at least n points in common with the curve.

There remains the still unsolved problem to show that also in the projective n -dimensional space the class of strictly convex curves is essentially the same as the class of linearly monotone curves.

References

- (1) *M. Barner*: Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven, Abh. Math. Sem. Hamburg **20** (1956), pp. 196—215.
- (2) *D. Derry*: On polygons in real projective n -space, Math. Scand. **6** (1958), pp. 50—66.
- (3) *Fr. Fabricius-Bjerre*: Om lineart-monotone elementarkurver, Nordisk Matem. Tidskr. **7** (1959), pp. 27—35.
- (4) *O. Haupt*: Streng-konvexe Bogen und Kurven in der direkten Infinitesimalgeometrie, Arch. der Math. **9** (1958), pp. 110—116.

Sur deux congruences associées à une congruence W

Par

Lucien Godeaux, Liège

En l'honneur de M. E. Kruppa

(Reçu le 22 juillet 1960)

A diverses reprises, nous nous sommes occupé des congruences W en utilisant la représentation de ces congruences par des surfaces de l'espace à cinq dimensions, tracées sur l'hyperquadrique de Klein¹. Cette note fait suite à ces recherches; nous associons, d'une manière intrinsèque, deux congruences de droites à une congruence W donnée.

1. Considérons une congruence W ; désignons par (x) , $(\bar{x})$ ses nappes focales, par u , v les asymptotiques de ces surfaces et par j la droite génératrice de la congruence.

Soient U , V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes aux courbes u , v en un point x de (x) , $\bar{U}$, $\bar{V}$ les points qui représentent les tangentes de même nom en un point $\bar{x}$ de $(\bar{x})$, enfin J le point qui représente la droite j .

Les droites $\bar{U}\bar{V}$, UV appartiennent à Q et se coupent au point J .

Les points U , V , de même que les points $\bar{U}$, $\bar{V}$, sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils donnent lieu à deux suites de Laplace

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots, \quad (L)$$

$$\dots, \bar{U}_n, \dots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n, \dots, \quad (\bar{L})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u .

¹ *La théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scient. No 138 (Paris, Herman, 1934). *Sur une homographie associée à une congruence W* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1955, pp. 870—874). *Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence W* (Idem. 1955, pp. 1101—1103). *Sulle congruence W* (Rendiconti di Matematica, Roma, 1956, pp. 36—45). *Congruence W e trasformazioni di Guichard* (Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, 1975, pp. 1—12).

Nous supposons connus les résultats obtenus dans ces notes et particulièrement ceux qui sont exposés dans le premier travail cité.

Les suites $L, \bar{L}$ sont autopolaires par rapport Q . D'une manière précise, le point U_n a pour hyperplan polaire $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ et le point V_n , l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$. On a la même propriété pour la suite $\bar{L}$.

Le point J décrit un réseau conjugué aux congruences (UV) , $(\bar{U}\bar{V})$. Il détermine une suite de *Laplace*

$$\dots, J_n, \dots, J_1, J, J_{-1}, \dots, J_{-n}, \dots \quad (\text{I})$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u , inscrite dans les suites $L, \bar{L}$. Précisément, le point J_n appartient aux droites $U_{n-1} U_n, \bar{U}_{n-1} \bar{U}_n$ et le point J_{-n} aux droites $V_{n-1} V_n, \bar{V}_{n-1} \bar{V}_n$.

2. On peut attacher à la congruence (j) une quatrième suite de *Laplace* de S_5 .

Désignons par P l'intersection des droites $U\bar{U}, V\bar{V}$, par P_1 l'intersection des droites $U\bar{U}, U_1 \bar{U}_1, \dots$, par P_n l'intersection des droites $U_{n-1} \bar{U}_{n-1} U_n \bar{U}_n$, par P_{-n} l'intersection des droites $V_{n-1} \bar{V}_{n-1} V_n \bar{V}_n$.

Le point J_n appartient aux droites $U_{n-1} U_n$ et $\bar{U}_{n-1} \bar{U}_n$ dont les conjugués par rapport à Q sont $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1}, \bar{V}_{n-2} \bar{V}_{n-1} \bar{V}_n \bar{V}_{n+1}$. L'hyperplan polaire de J_n contient ces deux espaces et par conséquent les points $P_{-n+2} P_{-n+1} P_{-n} P_{-n-1} P_{-n-2}$, qui le déterminent.

L'hyperplan polaire de P_{-n} est donc $J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1} J_{n+2}$.

De même, l'hyperplan polaire de J_{-n} est $P_{n-2} P_{n-1} P_n P_{n+1} P_{n+2}$ et par conséquent l'hyperplan polaire de P_n est $J_{-n+2} J_{-n+1} J_{-n} J_{-n-1} J_{-n-2}$.

En particulier, l'hyperplan polaire du point P est $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$ qui représente le complexe linéaire osculateur à la congruence W le long de la droite j .

La suite

$$\dots, P_n, \dots, P_1, P, P_{-1}, \dots, P_{-n}, \dots \quad (\text{II})$$

est la conjuguée de la suite (I) par rapport à Q ; c'est donc une suite de *Laplace* dont chaque point est la transformé du précédent dans le sens des u . Elle est circonscrite aux suites $L, \bar{L}$.

3. Considérons le plan $J_{n-1} J_n J_{n+1}$; il a pour conjugué par rapport à Q le plan $P_{-n+1} P_{-n} P_{-n-1}$ qui contient les points $V_{n-1}, \bar{V}_{n-1}, V_n, \bar{V}_n$. Ces deux plans coupent l'hyperquadrique Q suivant des coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_n .

De même, le plan $J_{-n+1} J_{-n} J_{-n-1}$ et son conjugué $P_{n-1} P_n P_{n+1}$ par rapport à Q coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques

dont les points représentent les génératrices rectilignes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_{-n} .

Considérons les quadriques Ψ_n et Ψ_{n+1} . Elles se rencontrent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche représentés par les points d'intersection avec Q des droites $J_n J_{n+1}$ et $P_{-n} P_{-n-1}$. Nous avons démontré que les sommets de ce quadrilatère sont caractéristiques pour les deux quadriques. Il en résulte que les enveloppes des quadriques Ψ_n , Ψ_{n+1} ont une partie commune, formée en général de quatre nappes.

On a un résultat analogue pour les quadriques Ψ_{-n} , Ψ_{-n-1} .

Nous avons attaché au point x d'une surface (x) une suite de quadriques Φ , Φ_1 , ..., Φ_n , ... dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour les deux quadriques. Appelons $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}_1$, ..., $\bar{\Phi}_n$, ... la suite de quadriques analogue attachée au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$.

Considérons les quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, Φ_{n-1} . Les génératrices rectilignes de la première sont représentées par les points des coniques sections de Q par les plans $U_{n-1} U_n U_{n+1}$, $V_{n-1} V_n V_{n+1}$; celles de la seconde par les points des sections de Q par les plans $\bar{U}_{n-1} \bar{U}_n \bar{U}_{n+1}$, $\bar{V}_{n-1} \bar{V}_n \bar{V}_{n+1}$.

Les plans $U_{n-1} U_n U_{n+1}$, $\bar{U}_{n-1} \bar{U}_n \bar{U}_{n+1}$ se coupent suivant la droite $J_n J_{n+1}$. Si l'on désigne par R_{n+1} , R'_{n+1} les points de rencontre de cette droite avec Q , ces points représentent des droites r_{n+1} , r'_{n+1} communes aux trois quadriques Φ_{n-1} , $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ_n .

Désignons par C_n , C'_n les points d'intersection avec Q de la droite $V_{n-1} V_n$, par $\bar{C}_n$, $\bar{C}'_n$ ceux de la droite $\bar{V}_{n-1} \bar{V}_n$, enfin par S_{n+1} , S'_{n+1} ceux de la droite $J_{-n} J_{-n-1}$. Soient c_n , c'_n , $\bar{c}_n$, $\bar{c}'_n$, s_{n+1} , s'_{n+1} les droites représentées par ces points.

Les quadriques Φ_{n-1} , $\bar{\Phi}_{n-1}$ ont en commun les droites s_{n+1} , s'_{n+1} .

Les quadriques Φ_{n-1} , Ψ_n ont en commun les droites c_n , c'_n .

Les quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ_n ont en commun les droites $\bar{c}_n$, $\bar{c}'_n$.

On observera que la quadrique Φ_n passent par les droites c_n , c'_n et la quadrique $\bar{\Phi}_n$ par les droites $\bar{c}_n$, $\bar{c}'_n$.

De même, les quadriques Φ_{n-1} , $\bar{\Phi}_{n-1}$ et Ψ_{-n} ont en commun les droites s_{n+1} , s'_{n+1} . Les quadriques Φ_{n-1} , Ψ_{-n} ont en commun les droites d_n , d'_n représentées par les points de rencontre de Q avec la droite $U_{n-1} U_n$ et les quadriques $\bar{\Phi}_{n-1}$, Ψ_{-n} les droites $\bar{d}_n$, $\bar{d}'_n$ représentés par les points d'intersection avec Q de la droite $\bar{U}_{n-1} \bar{U}_n$.

Observons que le point J_n appartient au plan $P_{n-1} P_n P_{n+1}$, conjugué du plan $J_{-n+1} J_{-n} J_{-n-1}$, donc les points J_n, J_{-n} sont conjugués par rapport à Q .

4. Considérons en particulier les trois quadriques $\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}$.

La quadrique Ψ_0 correspond aux plans $J_1 J J_{-1}$ et $P_{-1} P P_1$. Le second contient les points $U, V, \bar{U}, \bar{V}$ et coupe par conséquent Q suivant les droites $UV, \bar{U}\bar{V}$ qui représentent les faisceaux de tangentes en x à la surface (x) et en $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$. Les plans de ces faisceaux sont les plans focaux $\xi, \bar{\xi}$ de la congruence (j) .

Désignons par G_1, G_2 les points de rencontre de la droite $J_{-1} J_1$ avec l'hyperquadrique Q , par g_1, g_2 les droites qu'ils représentent. Le plan $J_1 J J_{-1}$ coupe Q suivant les droites $J J_1, J J_{-1}$.

L'espace $U_1 U V V_1$ coupe Q suivant deux plans: l'un, σ_1 , représente la gerbe de rayons de sommet x , l'autre, σ_2 , le plan réglé ξ . Chacun de ces plans contient un des points G_1, G_2 ; supposons que σ_1 contienne G_1 et σ_2, G_2 .

L'espace $\bar{U}_1 \bar{U} \bar{V} \bar{V}_1$ coupe Q suivant deux plans: l'un, $\bar{\sigma}_1$, représente la gerbe de sommet $\bar{x}$, l'autre, $\bar{\sigma}_2$, le plan réglé $\bar{\xi}$. Le plan $\bar{\sigma}_1$ doit contenir l'un des points G_1, G_2 . Il ne peut contenir G_1 , car la droite g_1 passe par x et devrait passer par $\bar{x}$, elle serait confondue avec la droite j , ce qui est absurde. Le plan $\bar{\sigma}_1$ passe donc par G_2 et le plan $\bar{\sigma}_2$ par G_1 .

On en conclut que la droite $J G_1$ représente le faisceau de rayons $(x, \bar{\xi})$ et la droite $J G_2$ le faisceau de rayons (x, ξ) . La droite g_1 appartient au premier, la droite g_2 au second.

La quadrique Ψ_0 est dégénérée dans les deux plans focaux $\xi, \bar{\xi}$ de (j) .

Considérons maintenant la quadrique Ψ_1 associée aux plans $J J_1 J_2$ et $P P_{-1} P_{-2}$. Cette quadrique doit avoir en commun avec Ψ_0 une quadrilatère gauche qui actuellement est dégénéré. La droite $J J_1$ touche au point J l'hyperquadrique Q et la droite $P P_{-1}$ coupe Q aux points $V, \bar{V}$. Le quadrilatère est donc formé de la droite j comptée deux fois et des tangentes aux courbes v aux points $x, \bar{x}$ aux surfaces $(x), (\bar{x})$. La quadrique Ψ_1 a comme points caractéristiques, comptés chacun deux fois, les points $x, \bar{x}$; elle touche donc les surfaces $(x), (\bar{x})$ aux foyers de la droite j .

De même, la quadrique Ψ_{-1} , associée aux plans $J J_{-1} J_{-2}$ et $P P_1 P_2$ passe par la droite j et par les tangentes aux courbes u en $x, \bar{x}$ aux surfaces $(x), (\bar{x})$. Les quadriques Ψ_1, Ψ_{-1} possèdent encore chacune

quatre autres points caractéristiques communs respectivement aux quadriques Ψ_2, Ψ_{-2} .

Observons que le point J_1 appartient aux plans $JJ_1J_2, PP_1P_2, UU_1U_2, \bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$ et le point J_{-1} aux plans $JJ_{-1}J_{-2}, PP_{-1}P_{-2}, VV_1V_2, \bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2$, par conséquent les quatre homographies biaxiales harmoniques ayant pour couples de plans axiaux JJ_1J_2 et $PP_{-1}P_{-2}$, $JJ_{-1}J_{-2}$ et PP_1P_2 , UU_1U_2 et VV_1V_2 , $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$ et $\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2$, qui transforment Q en soi, échangent entre eux les points G_1, G_2 . Ou encore, les droites g_1, g_2 sont échangées entre elles par les polarités par rapport aux quadriques Ψ_1, Ψ_{-1}, Φ et $\bar{\Phi}$.

5. Les coordonnées projectives normales de Wilczynski de point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2b \frac{\partial x}{\partial v} + c_1 x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + 2a \frac{\partial x}{\partial u} + c_2 x = 0.$$

Au point x , nous attachons le tétraèdre mobile de Cartan dont les sommets sont x et, en représentant par φ^{ik} la dérivée de φ prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v , les points

$$m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

$$y = [8ab - (\log a)^{10} \log b]^{01} x + 2x^{10} (\log b)^{01} + 2x^{01} (\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$$

et z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Tout point de S_5 peut être représenté par

$$\eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 \quad (1)$$

et les η, ξ sont les coordonnées locales du point.

Si nous représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q , le point (1) appartient à cette hyperquadrique si l'on a

$$\begin{aligned} \beta \eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2 (\log b h_1)^{01}]^2 - 2 \eta_0 \eta_2 - \\ - \alpha \xi_0^2 - [\xi_1 - \xi_2 (\log a h_1)^{10}]^2 + 2 \xi_0 \xi_2 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

où l'on a posé

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \quad k_1 = -\log a)^{11} + 4ab,$$

$$\alpha = 2 \log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}} + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}} + 4(a^{10} + c_2).$$

Au point (1) sous la condition (2) correspond la droite commune aux plans

$$\begin{aligned} \eta_2[z_1(\log. bh_1)^{01} + \beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2 \eta_0 z_3 + 2 \xi_0 z_2 + \\ + \xi_2 z_1 - \xi_2[z_1(\log. ak_1)^{10} + \alpha z_2] = 0, \\ \eta_2[z_3(\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2 \xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \xi_2[z_3(\log ak_1)^{10} - \alpha z_4] = 0, \\ \eta_2[z_2(\log bh_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2 \eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \xi_2[z_2(\log ak_1)^{10} - z_1] = 0, \\ \eta_2[z_2 + z_4(\log bh_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log ak_1)^{10}] = 0. \end{aligned}$$

6. Le point J est donné par

$$J = \lambda U - \mu V,$$

où l'on a $\lambda^{01} + 2a\mu = 0$, $\mu^{10} + 2b\lambda = 0$. En posant

$$\lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda(\log a)^{10}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1(\log ak_0)^{10},$$

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu(\log b)^{01}, \quad \mu_2 = \mu_1^{10} - \mu_1(\log bh_1)^{01},$$

on a, pour le second foyer de la droite j

$$\bar{x} = (\lambda_1 - \mu_1)x + \lambda m - \mu n$$

et le plan focal $\bar{\xi}$ a pour équation

$$\mu z_2 + \lambda z_3 + (\lambda_1 + \mu_1)z_4 = 0.$$

La droite j est donnée par

$$\mu z_2 + \lambda z_3 = 0, \quad z_4 = 0.$$

La quadrique Ψ_1 a pour équation

$$\lambda(z_2 z_3 + z_1 z_4) + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\mu_1 z_2 z_4 + 2[\mu_2 + \mu_1(\log bh_1)^{01}]z_4^2 = 0 \quad (\Psi_1)$$

et la quadrique Ψ_{-1}

$$\mu(z_2 z_3 + z_1 z_4) + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\lambda_1 z_3 z_4 + 2[\lambda_2 + \lambda_1(\log ak_1)^{10}]z_4^2 = 0. \quad (\Psi_{-1})$$

Enfin les droites g_1, g_2 sont données par

$$\frac{z_2}{\lambda\mu_1} = \frac{z_3}{\mu\lambda_1} = \frac{z_4}{-\lambda\mu}, \quad (G_1)$$

$$\lambda\mu z_1 - \mu\lambda z_2 - \lambda\mu_1 z_3 = 0, \quad z_4 = 0. \quad (G_2)$$

Les quadriques Ψ_1, Ψ_{-1} ont en commun, en dehors de j , la cubique gauche

$$\begin{vmatrix} \lambda z_3 + \mu z_2 & z_4 \\ \lambda z_1 + 2 \mu_1 z_2 + M z_4 & -z_2 \\ \mu z_1 + 2 \lambda_1 z_3 + L z_4 & -z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

passant par les points $x, \bar{x}$.

7. La droite g_1 engendre une congruence (g_1) associée d'une manière intrinsèque à la congruence (j) .

Si l'on représente par $\varphi x + \lambda \mu_1 m + \mu \lambda_1 n - \lambda \mu y$ un foyer de la droite g_1 , φ satisfait à l'équation

$$\begin{vmatrix} \mu \lambda_1 \mu_1 + 4 b \lambda^2 \mu_1 - \varphi \mu & \lambda \mu M - 4 a \mu^2 \lambda_1 - \lambda \mu_1^2 \\ \lambda \mu L - 4 b \lambda^2 \mu_1 - \mu \lambda_1^2 & \lambda \lambda_1 \mu_1 + 4 a \lambda_1 \mu - \varphi \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a posé

$$L = 2 \lambda_2 + 2 \lambda_1 (\log a k_1)^{10} + \alpha \lambda, \quad M = 2 \mu_2 + 2 \mu_1 (\log b h_0)^{01} + \beta \mu.$$

Quant à l'équation différentielle des développables, elle s'écrit

$$\begin{vmatrix} (\mu \lambda_1 \mu_1 + 4 b \lambda^2 \mu_1) du + (\lambda \mu M - 4 a \mu^2 \lambda_1 - \lambda \mu_1^2) dv & \mu du \\ (\lambda \mu L - 4 b \lambda^2 \mu_1 - \mu \lambda_1^2) du + (\lambda \lambda_1 \mu_1 + 4 a \mu^2 \lambda_1) dv & \lambda dv \end{vmatrix} = 0.$$

8. La droite g_2 engendre également une congruence (g_2) liée intrinsèquement à la congruence (j) .

La droite g_2 rencontre les droites xm, xn aux points $\lambda_1 x + \lambda m, \mu_1 x + \mu n$. Si l'on représente un foyer par

$$\lambda_1 x + \lambda m + \varphi(\mu_1 x + \mu n),$$

φ satisfait à l'équation

$$\begin{vmatrix} L \lambda \mu + 4 b \lambda^2 \mu_1 - \mu \lambda_1^2 + \varphi(\mu \lambda_1 \mu_1 + 4 b \lambda^2 \mu_1) & \mu \varphi \\ \lambda \lambda_1 \mu_1 + 4 a \mu^2 \lambda_1 + \varphi(M \lambda \mu + 4 a \mu^2 \lambda_1 - \lambda \mu_1^2) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'équation différentielle des développables est donnée par

$$\begin{vmatrix} (L \lambda \mu + 4 b \lambda^2 \mu_1 - \mu \lambda_1^2) du + (\mu \lambda_1 \mu_1 + 4 b \lambda^2 \mu_1) dv & \mu du \\ (\mu \lambda_1 \mu_1 + 4 a \mu^2 \lambda_1) du + (M \lambda \mu + 4 a \mu^2 \lambda_1 - \lambda \mu_1^2) dv & \lambda dv \end{vmatrix} = 0.$$

Liège, le 14 juillet 1960.

Cremonatransformation von Folgen modulo 1

Von

Edmund Hlawka, Wien

Herrn Professor E. Kruppa zum 75. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 18. November 1960)

Ist x ein Punkt im euklidischen R^s ($s \geq 1$) mit den Koordinaten $p_1(x), \dots, p_s(x)$, so kann man ihm den Punkt $\bar{x}$ im Einheitswürfel E^s : $0 \leq \xi_j < 1$ ($j=1, \dots, s$) mit den Koordinaten $p_j(x) - [p_j(x)]$ ($j=1, \dots, s$), $[p]$ nächstkleinere ganze Zahl an p zuordnen. Es heißt $\bar{x}$ der reduzierte Punkt zu x modulo 1, $\bar{x} \equiv x \pmod{1}$. Ist nun ω eine unendliche Folge $x_1, x_2, \dots$ von Punkten, ω_n ($n \geq 1$) die endliche Folge $x_1, \dots, x_n$, dann bezeichnen wir die zugehörigen Folgen der reduzierten Punkte mit $\bar{\omega}$ bzw. $\bar{\omega}_n$. Es sei $Q = Q^s$: $\alpha_j \leq \xi_j < \beta_j$ ($j=1, \dots, s$) ein beliebiges Intervall in E^s . Mit $\nu_n(Q, \omega)$ bezeichnen wir die relative Häufigkeit, mit welcher die Punkte von $\bar{\omega}_n$ in Q auftreten, d. h. wenn n' die Anzahl der Punkte von $\bar{\omega}_n$ in Q ist, dann ist $\nu_n = n'/n$, oder wenn $\chi_Q(\xi)$ die charakteristische Funktion von Q ist, dann ist $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_Q(\bar{x}_j)$.

Wir sagen nun, die Folge ω bzw. $\bar{\omega}$ ist gleichverteilt mit der Dichte $\varrho(\varrho(x)$ nichtnegativ, integrierbar auf E^s , $\int_E \varrho(\xi) d\xi = 1$, $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_s$, wenn für jedes Q die Folge ν_n einen Grenzwert besitzt und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(Q, \omega) = \int_Q \varrho(\xi) d\xi = \int_E \varrho(\xi) \chi_Q(\xi) d\xi \quad (1)$$

ist. Wenn $\varrho \equiv 1$ auf E , dann ist ω gleichverteilt mod 1 im klassischen Sinne und das Integral in (1) ist einfach das Volumen von Q . (Man kann allgemeiner Doppelfolgen $\omega: x_{11}; x_{21}, x_{22}; x_{n1}, \dots, x_{nm}; \dots$ mit $\omega_n: x_{n1}, \dots, x_{nn}$ betrachten).

Man nennt

$$D_n(\omega) = D(\omega_n) = \sup_{Q \subset E} \left| \nu_n(Q; \omega) - \int_Q \varrho(\xi) d\xi \right| \quad (2)$$

die Diskrepanz von ω_n , welche stets ≤ 1 ist. Es ist bekannt, daß aus (1) folgt $\lim D_n(\omega) = 0$ folgt. Es ist ω genau dann ϱ — gleichverteilt, wenn für jede auf E definierte, im Riemannschen Sinne integrierbare, komplexwertige Funktion w

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w(\bar{x}_k) = \int_E w(\xi) \varrho(\xi) d\xi \quad (3)$$

ist und (3) gilt genau dann, wenn (3) für die Funktionen $\exp(\langle h, x \rangle)$ erfüllt ist für alle Gitterpunkte $h \neq (0, \dots, 0)$ ins $R^s(\langle h, x \rangle = \text{skalares Produkt von } h \text{ und } x, \exp \alpha = e^{2\pi i \alpha})$. Es sei eine Folge $\omega = \langle x_j \rangle$ gegeben, wo wir o. B. d. A. gleich alle x dieser Folge als reduziert annehmen. Wir üben nun auf jedem Punkt x dieser Folge mit den Koordinaten $(\xi_1, \dots, \xi_s)$ die Cremonatransformation $x \rightarrow y = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ mit $\eta_j = \xi_j^{-1}$ ($j=1, \dots, s$) aus, welche, wenn wir nicht projektive Koordinaten heranziehen, nur definiert ist, wenn alle Koordinaten von x ungleich Null sind, und betrachten die reduzierten Punkte $\bar{y} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s)$, wo also

$$\bar{\eta}_j = \xi_j^{-1} - [\xi_j^{-1}] \quad (4)$$

Ist ein $\xi_j = 0$, dann definieren wir $\bar{\eta}_j = 0$. Damit ist der Folge $\omega = \langle x_j \rangle$ eine Folge $\omega^* = \langle \bar{y}_j \rangle$ im E^s zugeordnet. Ist nun ω gleichverteilt (mit $\varrho \equiv 1$), dann ist ω^* nicht mehr gleichverteilt mit Dichte 1, besitzt aber wieder eine Dichte, und zwar ist die Dichte

$$\sigma(\xi) = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_s) = \tau_1(\xi) \dots \tau_s(\xi_s) \quad (5)$$

$$\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+t)^2} \quad (5')$$

Für $s = 1$ ist dies schon lange bekannt¹. Den Beweis führen wir in folgender Weise:

Es sei l eine natürliche Zahl, $\varphi(t)$ die auf $0 \leq t < 1$ stetige, beschränkte Funktion $\varphi(t) = (l^2 - l)t + 1$ ($0 \leq t < l^{-1}$), $\varphi(i) = l$ ($l \leq t < 1$). Dann ist auch $\psi(\xi) = \exp \sum_{j=1}^s h_j \varphi(\xi_j)$ ($h_1, \dots, h_s$ ganz, nicht alle 0) auf E^s stetig mit $|\psi| \leq 1$.

Es ist

$$J = \int_0^1 \exp(h \tau(t)) dt = \int_0^{1/l} + \int_{1/l}^1 = J_1 + J_2$$

¹ Vgl. J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (1936) Kap. 8, S. 97. Berlin, Julius Springer.

J. Schoenberg, Math. Zeitschrift 28 (1928).

wo

$$J_2 = \int_1 t^{-2} \exp(h t) dt = \sum_{n=1}^{l-1} \int_0^1 (t+n)^{-2} \exp(h t) dt$$

also

$$\left| \int_0^1 \exp(h t) \tau(t) dt - J_2 \right| \leq \sum_{n=l}^{\infty} \int_0^1 (t+n)^{-2} dt = l^{-1}$$

also

$$\left| \int_0^1 \exp(h t) \tau(t) dt - J \right| \leq 2 l^{-1}.$$

Wir wenden uns auf ω (3) mit $\varrho(\xi) = 1$ an. Die Punkte x von ω_4 und damit von ω_n^* liegen entweder in der Klasse k_1 , wo $p_j(x) \geq l^{-1}$ für alle j , die Klasse K_2 enthält die übrigen Punkte von ω_n . Die Anzahl n' der Punkte in K_2 schätzen wir so ab: Es muß ja dann für mindestens ein j $p_j(x) < l^{-1}$ sein, d. h. alle diese x_k liegen in mindestens einem Intervall $Q_j: 0 \leq \xi_j < l^{-1}$ $0 \leq \xi_i < 1$ ($i \neq j$) mit Volumen l^{-1} . Es ist also $n' \leq n \sum_{j=1}^s \nu_n(Q_j, \omega)$, also

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\exp \langle h, \bar{y}_k \rangle) - \psi(x_k) \right| \leq 2 \sum_{j=1}^s \nu_n(Q_j, \omega) \quad (6)$$

$$\left| \int_E \sigma(\xi) \exp \langle h, \xi \rangle d\xi - \int_E \psi(\xi) d\xi \right| \leq 2 s |l|$$

also

$$\Delta_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \langle h, y_k \rangle - \int_E \sigma(\xi) \exp \langle h, \xi \rangle d\xi \right| \leq 2 \left(\sum_{j=1}^s \nu_n(Q_j, \omega) + \frac{s}{l} \right) \quad (7)$$

Aus (1) folgt mit $n \rightarrow \infty$, $\lim \Delta_n \leq 4 s l^{-1}$ und da l beliebig, so folgt die Behauptung.

Wir wollen nun, das ist das Ziel dieser Arbeit, eine quantitative Verschärfung dieser Behauptung geben.

Es sei nun $\omega_n: x_1, \dots, x_n$ eine beliebige endliche Folge, ω_n^* die zugehörige Folge $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$, $D = D(\omega_n)$, $D^* = D(\omega_n^*)$ die zugehörigen Diskrepanzen mit Dichten $\varrho \equiv 1$ bzw. $\varrho \equiv \sigma$, dann behaupten wir²

$$|D(\omega_n^*)| \leq 2 (12)^s D^{\frac{1}{s+1}}(\omega_n). \quad (8)$$

Ist ω_n der n -te Abschnitt einer gleichverteilten Folge, so folgt wieder die frühere Behauptung.

² Vorgetragen im Institute for Advanced Study November 1959.

Um (8) zu beweisen, müssen wir einiges vorausschicken:

Es sei Z irgendeine Zerlegung des $E^l: 0 \leq \eta_1 < 1, \dots, 0 \leq \eta_l < 1$ ($l \leq s$) in achsenparallele Intervalle $q: \alpha_j \leq \eta_j < \beta_j$ ($j = 1, \dots, l$), ist $g(\eta) = g(\eta_1, \dots, \eta_l)$ auf E^l definiert, dann sei $\Sigma_l(Z) = \sum_{q \in Z} |\Delta_q^{(l)} g(\xi)|$,

wo $\Delta_q g(\xi)$ die Summe der Werte von $g(\xi)$ in den Eckpunkten von q ist, und zwar mit Vorzeichen -1 oder $+1$ versehen, je nachdem die Anzahl der α in den Koordinaten der Eckpunkte ungerade ist oder nicht.

Ist nun $V_l(g) = \sup_Z \Sigma_l(Z) < \infty$, dann heißt g von beschränkter

Variation im Sinne von Vitali. Es sei nun $l = s$. Jede Zerlegung Z von E^s bedingt Zerlegungen Z_l in allen $E^l: 0 \leq \xi_l < 1, \dots, 0 \leq \xi_s < 1$ ($t_1, \dots, t_l$ beliebige Kombination aus $1, \dots, s$), wobei die übrigen $s - l$ Variablen festgehalten werden. Ist nun $w(\xi)$ eine Funktion auf E^s und ist sie auf jedem E^l ($l \leq s$) von beschränkter Variation im Sinne von Vitali, dann heißt w auf E^s von beschränkter Variation im Sinne von

G. Hardy und Krause. Setzen wir dies voraus und ist $V(w) = \sum_{l=1}^s K_l$, $K_l = \sup V_l(w)$ über alle E^l , dann ist ²,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w(\bar{x}_k) - \int_E w(\xi) d\xi \right| \leq V(w) D(\omega_n). \quad (9)$$

Wir definieren nun $w(\xi) = w(\xi_1, \dots, \xi_s)$ so: Es sei J ein Intervall $0 \leq \xi_j < \gamma_j < 1$ ($j = 1, \dots, s$), l eine natürliche Zahl, $Q_l: l^{-1} \leq \xi_j < 1$ ($j = 1, \dots, s$), dann sei $w(\xi) = \chi_J(\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s)$ ($\bar{\eta}$ nach (4) definiert), wenn ξ in Q_l liegt, sonst 0 in E^s . Wir werden nun zeigen, daß stets $V_l(w) \leq (2l)^j$ ist. Es genügt dies für $l = s$, also

$$V_s(w) \leq (2l)^s \quad (10)$$

zu zeigen. Wir haben also für eine Zerlegung Z die Summe $\Sigma(Z)$ abzuschätzen. Wir wählen Z so, daß kein innerer Punkt der Intervalle q auf einer der Ebenen $\xi_j = l^{-1}$ liegt. In Σ brauchen wir zunächst nur jene $q \in Q_l$ berücksichtigen, dann ist also $\Sigma \delta(q) = \Sigma |\Delta_q^{(s)} \chi_J(\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_s)|$ abzuschätzen. Da aber δ nur 0 oder 1 ist, so ist also die Anzahl der q mit $\delta(q) = 1$ abzuschätzen. Wir wollen den Eckpunkt $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ bzw. $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ eines Intervalls $i: \alpha_j \leq \xi_j < \beta_j$ ($j = 1, \dots, s$) als unteren Eckpunkt $u(i)$ bzw. oberen Eckpunkt $o(i)$ von i bezeichnen. $\delta(q)$ hängt nur von den 2^s Eckpunkten von q ab. Bei der Transformation (4) gehen diese Eckpunkte in 2^s Punkte über, welche wir als Eckpunkte eines Intervalls Q auffassen können, dann ist also $\delta(q) = |\Delta_Q \chi_J(\eta)|$. Es ist

nun $\delta(q)$ genau dann ungleich 0, wenn der untere Eckpunkt von Q in J liegt, alle anderen Eckpunkte außerhalb, also wenn $Q: a_j \leq \eta_j < b_j$, dann muß $a_j < \gamma_j \leq b_j$ ($j = 1, \dots, s$) sein. Ist $s = 1$, dann ist $\delta(q) = |\chi(b) - \chi(a)| = 1$ genau dann, wenn $a < \gamma \leq b$.

Ist die Behauptung für alle Dimensionen $< s$ bewiesen, so schließen wir so: Ist für alle $j: a_j < b_j < \gamma_j$ bzw. $\gamma_j < a_j < b_j$, so ist $\chi = 1$ bzw. 0. für alle Eckpunkte, also $\delta = 0$. Soll $\delta = 1$ sein, so muß für ein $j: a_j < \gamma_j \leq b_j$ z. B. für $j = 1$ sein. Dann ist aber $\chi = 0$ für alle Eckpunkte von Q , welche eine Koordinate b_1 besitzen, dann ist aber $\Delta_Q \chi_J = \Delta_{Q'} \chi_{J'}$, wo $Q': a_j \leq \eta_j < b_j$ ($j = 2, \dots, s$), $J': \eta_1 = a_1$, $0 \leq \xi_j < b_j$ ($j = 2, \dots, s$). Wenn also $\delta \neq 0$ sein soll, so muß also nach Induktionsannahme $a_j < \gamma_j \leq b_j$ ($j = 2, \dots, s$) sein w.z.b.w. Jetzt können wir (10) zeigen. Wir stellen zunächst fest, wie viele verschiedene j -te Koordinatenwerte bei den $u(q)$ von q vorkommen könnten. Nehmen wir $j = 1$ an, dann seien die verschiedenen Werte $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$. Wir behaupten nun, daß $t \leq 2l$ ist. Es seien $q_1, \dots, q_t$ Intervalle mit ε_j ($j = 1, \dots, t$) als 1-Koordinate von $u(q_j)$. Wir ordnen die ε nach ihrer Größe

$$l^{-1} \leq \varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_r < \varepsilon_{r+1} < \varepsilon_{r+2} < \dots < 1.$$

Für die 1-Koordinate ϱ der oberen Eckpunkte $o(q)$ gilt also

$$\varepsilon_r < \varrho_r \leq \varepsilon_{r+1} < \varrho_{r+1} \leq \varrho_{r+2}$$

für alle $r \leq s - 2$. Wir setzen noch $[\varepsilon_j^{-1}] = m_j$. Es ist stets $m_r \geq m_{r+1}$.

Wir wollen zeigen, daß sogar

$$m_r \geq m_{r+2} + 1 \quad (r = 1, \dots, s - 2). \quad (11)$$

Ist (11) falsch für ein r , so ist $m_r = m_{r+1} = m_{r+2}$ also gleich einer festen Zahl k , also auch $[p_1^{-1}(\pi)] = k$ für alle Eckpunkte π von q_r und q_{r+1} .

Setzen wir $\sigma_j = \varepsilon_j^{-1} - [\varepsilon_j^{-1}]$, $\tau_j = \eta_j^{-1} - [\eta_j^{-1}]$, so ist also

$$\sigma_r > \tau_r \geq \sigma_{r+1} > \tau_{r+1} \quad (11')$$

Ordnen wir wie vorher durch die Transformation (4) jedem q ein Intervall Q zu, dann sind nach (11') σ_r bzw. σ_{r+1} die 1. Koordinaten der oberen Eckpunkte bzw. τ_r, τ_{r+1} der unteren Eckpunkte von Q_r bzw. Q_{r+1} . Nun ist $\delta \neq 0$ genau dann, wenn $e(Q_j)$ in J , $o(Q_j)$ nicht in J , also

$$\sigma_r \geq \gamma_1 > \tau_r \geq \sigma_{r+1} \geq \gamma_1 > \tau_{r+1} \text{ Widerspruch.}$$

Aus (11) folgt nun $m_1 \geq m_j + [\frac{j-1}{2}]$ für $j = 1, \dots, s$. Für $j = 1, 2$ richtig.

Wir wollen es nun für $v \geq 3$ zeigen und nehmen an, daß es für alle $j < v$ richtig ist. Wir wenden (11) mit $r = v - 2$ an und erhalten $r_1 \geq r_{v-2} + [\frac{v-3}{2}] \geq r_v + [\frac{v-1}{2}]$. Es ist also $l \geq r_1 \geq r_s + [\frac{s-1}{2}] \geq 1 + [\frac{s-1}{2}] > \frac{s-1}{2}$, also $2l \geq s$.

Da also jede Koordinate von $e(q)$ höchstens $2l$ Werte annehmen kann, so gibt es höchstens $(2l)^s$ Intervalle mit $\delta(q) = 1$, als gilt (9) mit $V = (6l)^s$, wenn wir noch jene $q \in Q_l$ berücksichtigen, welche Randpunkte mit Q_l gemeinsam haben. Wir gehen nun wie beim Beweis mit (5) vor, berücksichtigen, daß $|w| \leq 1$, berücksichtigen

$$\left| \int_E w d\xi - \int_E \chi_J(\xi) \sigma(\xi) d\xi \right| \leq 2s |l|$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\chi_J(\bar{y}_k) - w(\bar{x}_k)) \right| \leq 2 \sum_{j=1}^s \nu_n(Q_j, \omega) \leq 2s D(\omega_n)$$

also nach (5)

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_J(\bar{y}_k) - \int \chi_J(\xi) \sigma(\xi) d\xi \right| \leq ((6l)^s + 2s) D + 2l |s|. \quad (12)$$

Wir wählen nun für l die nächstgrößere ganze Zahl an $D^{-\frac{1}{s+1}}$, also $l \geq D^{-\frac{1}{s+1}} > l - 1$, also da $D \leq 1$, $l \leq 2 D^{-\frac{1}{s+1}}$, also ist die Schranke rechts in (12) sicher $< 2 \cdot 12^s \cdot D^{\frac{1}{s+1}}$. Jedes beliebige Intervall in E^s läßt sich als algebraische Summe von höchstens 2^s Intervallen mit unteren Eckpunkt $(0, \dots, 0)$ darstellen, und damit ist (8) bewiesen.

Eine zusammenhängende Ebene ohne nichtgerade Kurven

Von

Hans Hornich, Wien

Prof. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 17. August 1960)

Ein linearer Raum, der durch eine Entfernungsdefinition mit Hilfe eines reellwertigen nichtnegativen Funktional (das nicht notwendig der Dreiecksungleichung genügt) zu einem topologischen Raum gemacht wird, braucht nicht ein zusammenhängender zu sein. Es liegt die Frage nahe, ob für einen zusammenhängenden Raum R auch die linearen Teilräume von R zusammenhängende Mengen sind. Wir zeigen hier an einem Beispiel, daß dies nicht der Fall sein muß; wir konstruieren eine zusammenhängende Ebene so, daß fast alle Geraden auf dieser total unzusammenhängende Mengen sind; abgesehen von den Teilintervallen gewisser Geraden gibt es auf dieser Ebene überhaupt keine kompakten Kontinua, also auch keine nichtgeraden Kurven.

Sei E die komplexe Zahlenebene der $z = x + iy$; wir bestimmen ein Funktional p durch

$$p(0) = 0$$

$$p(x) = 1 \text{ für } x \neq 0$$

$$p(iy) = |y|;$$

für beliebige z definieren wir $p(z)$, indem wir p auf den Geraden $|x| + |y| = \text{konst.}$ zwischen den Schnittpunkten mit der x - und der y -Achse interpolieren und setzen

$$p(0) = 0$$

$$p(x + iy) = \frac{|x| + y^2}{|x| + |y|} \text{ für } x + iy \neq 0.$$

Die Entfernung zwischen zwei Punkten z_1 und z_2 auf E setzen wir $p(z_1 - z_2)$. Sie ist dann und nur dann $= 0$, wenn $z_1 = z_2$, sonst positiv und symmetrisch: $p(z_1 - z_2) = p(z_2 - z_1)$ und es gilt für jedes $z \neq 0$

$$p(tz) = a(z) + |t| b(z)$$

für jedes reelle $t \neq 0$ mit gewissen $a(z)$, $b(z) \geq 0$. Es genügt also $p(tz)$ der Dreiecksungleichung in Bezug auf t , aber nicht in Bezug auf z . Eine einfache Rechnung zeigt übrigens, daß $p(x + iy)$ für alle $x \geq 0$, $y \geq 0$ der Dreiecksungleichung genügt.

Ist (z_n) eine Fundamentalfolge in E , also für jedes $\varepsilon > 0$

$$p(z_n - z_m) < \varepsilon \text{ für } n, m > N(\varepsilon),$$

so ist

$$|\cos [\arg(z_n - z_m)]| + \sin^2 [\arg(z_n - z_m)] |z_n - z_m| < 2\varepsilon$$

also

$$|\cos [\arg(z_n - z_m)]| < 2\varepsilon \text{ für } n, m > N(\varepsilon)$$

und die Folge der (z_n) ist eine Fundamentalfolge auch in der euklidischen Maßbestimmung, konvergiert also etwa gegen z_0 , $|z_n - z_0| \rightarrow 0$. Es ist dann weiter auch $p(z_n - z_0) \rightarrow 0$ und z_0 ist Limes der z_n auch in E ; E ist also ein vollständiger Raum.

Für die Fundamentalfolgen (z_n) in E gilt also stets

$$\arg(z_n - z_m) \rightarrow \frac{\pi}{2} \bmod \pi \text{ für } n, m \rightarrow \infty.$$

Wie man leicht sieht, ist E ein *Hausdorffscher* Raum. (Eine in E konvergente Folge ist nicht notwendig auch eine Fundamentalfolge.)

Die Ebene E ist zusammenhängend. Denn jede Gerade $x = \text{konst.}$ ist eine zusammenhängende Menge, längs jeder Parabel $x = \pm y^2$ strebt

$$p(x + iy) = \frac{2y^2}{|y| + y^2} \rightarrow 0$$

für $x \rightarrow 0$, also ist jeder Punkt einer Gerade $x = c$ Häufungspunkt von Punkten der Geraden $x = c'$ für $c' \rightarrow c$ und die Menge aller Geraden $x = \text{konst.}$ ist wieder zusammenhängend.

Jede Gerade $y = ax + b$ stellt dagegen eine total unzusammenhängende Menge dar: denn für je zwei verschiedene Punkte einer solchen Gerade ist deren Entfernung

$$p(x_1 - x_2 + ia(x_1 - x_2)) \geq \frac{1}{1 + |a|}.$$

Jeder Punkt $z = x + iy$ mit $\left|\frac{y}{x}\right| < a$ hat vom Nullpunkt eine Entfernung $\geq \frac{1}{1 + |a|}$.

Sei nun K eine in sich kompakte, zusammenhängende Menge in E und mehrpunktig. Sei q ein Punkt von K und $\varepsilon > 0$. Dann ist die Kreisscheibe $|z - q| < \varepsilon$, wie man sofort sieht, auch in E eine offene Menge. Auf dem Rand $|z - q| = \varepsilon$ liegen für hinreichend kleines ε nur endlichviele Punkte von K : gäbe es auf dem Rand unendlichviele Punkte von K , so müßten diese wegen der Kompaktheit von K eine konvergente Teilfolge enthalten, deren Limes wieder auf $|z - q| = \varepsilon$ liegt; für eine solche müßte nach dem Obigen der Grenzpunkt auf der Gerade $y = \Im q$ liegen; auf dieser Gerade können aber — wieder wegen der Kompaktheit von K — nur endlichviele Punkte von K liegen. Also gibt es für hinreichend kleine ε nur endlichviele Punkte von K auf $|z - q| = \varepsilon$. Es ist daher K eindimensional, u. zw. eine reguläre Kurve¹. Eine solche Kurve ist aber bogenverknüpft². Für jeden Punkt q eines solchen Bogens b und jede nach q konvergente Folge von Punkten (q_n) auf b gilt aber

$$\lim \arg(q_n - q) = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$$

für $n \rightarrow \infty$, d. h. aber b ist ein Intervall einer Gerade $x = \text{konstant}$ und weil K zusammenhängend ist, ist auch K ein solches Intervall.

Es ist also jede in sich kompakte zusammenhängende und mehrpunktige Menge aus E ein Teilintervall einer Gerade $x = \text{konst.}$

¹ K. Menger, Kurventheorie, S. 96.

² l.c. S. 256.

Zweispurensysteme im projektiven vierdimensionalen Raum

Von

H. Horninger, Istanbul

Prof. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 7. Januar 1961)

Mit 5 Textabbildungen

Der Jubilar hat die allgemeinen und besonderen Zweispurensysteme des projektiven dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}_3$ systematisch begründet und in erschöpfender Weise charakterisiert¹. Es liegt nahe, die hiebei verwendeten Prinzipien auf den vierdimensionalen Raum R_4 anzuwenden und demnach die *allgemeinen und besonderen Zweispurensysteme des projektiven Raums $\mathbb{R}_4$* zu untersuchen. Dennoch habe ich in der mir zugänglichen Literatur keine Abhandlung gefunden, bei der der Grundgedanke des Zweispurensystems, *die Gebilde des $\mathbb{R}_4$ als Strahlmannigfaltigkeiten aufzufassen und diese auf geometrische Verwandtschaften zwischen orientierten Punktepaaren im Darstellungsraum $\mathbb{R}_3$ abzubilden*, in systematischer Weise zur Anwendung gelangt². Dieser Gedanke bildet das Leitprinzip der nachstehenden Erörterungen, in denen nach einem kurzen Überblick über die Darstellung der projektiven Grundgebilde und der Lagenbeziehungen im $\mathbb{R}_4$ die Verwandtschaften beschrieben werden, auf die die *Mannigfaltigkeiten der gemeinsamen Treffgeraden gegebener Geraden und Ebenen* im Darstellungsraum abgebildet werden³.

¹ E. Müller — E. Kruppa: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Band I: Die linearen Abbildungen.

² Der von H. de Vries gegebenen Darstellung des Zentralrisses im $\mathbb{R}_4$ (vgl. Fußn. 5) liegt zwar ein spezielles Zweispurensystem zugrunde, doch handelt es sich bei dieser Abhandlung mehr um die Beschreibung von Konstruktionen in der Bildebene als um die Charakterisierung von Punktverwandtschaften im Bildraum.

³ Über eine Darstellung ähnlicher Probleme in einem Zweibilderverfahren vgl. H. Horninger: Über Treffprobleme im vierdimensionalen projektiven Raum (Revista de Matematica y Fisica Teorica; Univ. Nac. Tucuman, Bd. XIII, 1960).

1. Beim allgemeinen Zweispurenprinzip des dreidimensionalen projektiven Raums $\mathfrak{R}_3$ wählt man bekanntlich die Zeichenebene π als Bildebene, einen nicht in π liegenden Punkt Z^0 als Abbildungszentrum und zwei von π verschiedene, mit Z^0 nicht inzidente Ebenen des $\mathfrak{R}_3$ als Spurebenen; die Schnittgerade s^0 der beiden Ebenen ergibt, aus Z^0 auf π projiziert, die Spurachse s , mit deren Hilfe alle Lagenaufgaben des $\mathfrak{R}_3$ gelöst werden können⁴.

Das allgemeine Zweispurenprinzip des vierdimensionalen projektiven Raums $\mathfrak{R}_4$ kann in analoger Weise definiert werden: Man wählt den dreidimensionalen Darstellungsraum Δ als *Bildraum*, einen Δ nicht angehörigen Punkt Z^0 des $\mathfrak{R}_4$ als *Abbildungszentrum* und zwei von Δ verschiedene, mit Z^0 nicht inzidente Räume (Hyperebenen) Σ_1^0, Σ_2^0 des $\mathfrak{R}_4$ als *Spurräume*; die Schnittebene σ^0 der Räume ergibt, aus Z^0 auf Δ projiziert, die *Spurebene* σ , mit deren Hilfe, wie im Folgenden gezeigt wird, alle Lagenaufgaben des $\mathfrak{R}_4$ gelöst werden können.

Jede Gerade g^0 des $\mathfrak{R}_4$ wird durch ihre in Σ_1^0, Σ_2^0 liegenden Spurpunkte G_1^0, G_2^0 festgehalten und diese werden aus Z^0 auf Δ projiziert. Als Bild von g^0 ergibt sich hiebei das Paar der *Bildspurpunkte* G_1, G_2 ; die Gerade $g = [G_1 G_2]$ ist der zum Augpunkt Z^0 gehörige Zentralriß von g^0 (Abb. 1). Die Geraden des $\mathfrak{R}_4$ werden durch diese Vorschrift umkehrbar eindeutig auf die *orientierten Punktepaare* von Δ abgebildet. Die Geraden, die einem Spurraum angehören, werden in einem Bild durch eine Gerade, im andern durch deren in σ liegenden Spurpunkt dargestellt; jede Gerade von σ^0 wird auf eine doppeltzählende Gerade von σ , jeder Sehstrahl auf einen doppeltzählenden Punkt von Δ abgebildet.

Jede Ebene ε^0 des $\mathfrak{R}_4$ schneidet die Räume Σ_1^0, Σ_2^0 in ihren einander auf σ^0 treffenden Spurgeraden e_1^0, e_2^0 . Projektion derselben aus Z^0 auf Δ ergibt zwei einander in σ schneidende Gerade e_1, e_2 als *Bildspurgerade* von ε^0 ; die Ebene $\varepsilon = [e_1 e_2]$ ist der zum Augpunkt Z^0 gehörige Zentralriß von ε^0 . Die Ebenen des $\mathfrak{R}_4$ werden somit umkehrbar eindeutig auf die *orientierten Geradenpaare* von Δ abgebildet, die einander in σ schneiden. Die Ebenen, die einem Spurraum angehören, werden in einem Bild durch eine Ebene, im anderen durch deren Spur mit σ dargestellt; das Bild von σ^0 ist die doppeltzählende Ebene σ , jede Sehebene wird auf eine doppeltzählende Gerade von Δ abgebildet. Das Geradenfeld $\varepsilon^0(g^0 \dots)$ wird durch die Gesamtheit der orientierten Punktepaare der

⁴ Vgl. E. Müller — E. Kruppa, a, a, O. Nr. 37.

Punktreihen $e_1(G_1 \dots)$, $e_2(G_2 \dots)$ dargestellt; alle mit g^0 inzidenten Ebenen ε^0 des $\mathfrak{R}_4$ werden auf die Paare einander entsprechender Strahlen der durch σ perspektiv aufeinander bezogenen Bündel abgebildet, deren Scheitel die Bildspurpunkte G_1, G_2 von g^0 sind.

Jeder Raum $\mathfrak{R}^0$ des $\mathfrak{R}_4$ schneidet die Spurräume in zwei einander in σ^0 treffenden Ebenen ϱ_1^0, ϱ_2^0 ; Projektion derselben aus Z^0 auf Δ ergibt zwei einander in einer Geraden r von σ schneidende Ebenen ϱ_1, ϱ_2 als *Bildspurebenen* von $\mathfrak{R}^0$. Die Räume des $\mathfrak{R}_4$ werden demnach umkehrbar eindeutig auf die *orientierten Ebenenpaare* des Bildraumes Δ abgebildet, die einander in σ schneiden. Jeder der beiden Spurräume wird in einem Bild durch Δ , im andern durch σ dargestellt; jeder Sehraum besitzt eine doppeltzählende Ebene von Δ zum Bild. Der Geradenraum $\mathfrak{R}^0(g^0 \dots)$ wird durch die Gesamtheit aller orientierten Punktepaare der Felder $\varrho_1(G_1 \dots)$, $\varrho_2(G_2 \dots)$ dargestellt, der Ebenenraum $\mathfrak{R}^0(\varepsilon^0 \dots)$ durch die Gesamtheit der orientierten Geradenpaare der Felder $\varrho_1(e_1 \dots)$, $\varrho_2(e_2 \dots)$, die einander auf r treffen. Die Räume des $\mathfrak{R}_4$, die mit einer Geraden g^0 oder einer Ebene ε^0 inzident liegen, werden durch die Paare einander entsprechender Ebenen zweier durch σ perspektiv aufeinander bezogener Bündel bzw. Büschel dargestellt; die Bündelscheitel sind die Bildspurpunkte von g^0 , die Büschelachsen sind die Bildspurgeraden von ε^0 .

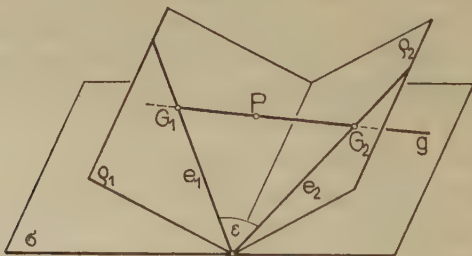


Abb. 1

Jeder von Z^0 verschiedene Punkt P^0 des $\mathfrak{R}_4$ wird aus Z^0 in einen bestimmten Punkt P von Δ projiziert. Die mit P^0 inzidenten Geraden, Ebenen und Räume des $\mathfrak{R}_4$ stellen zwischen Σ_1^0, Σ_2^0 eine kollineare Verwandtschaft her, die in Δ durch eine *perspektive räumliche Kollineation* mit dem Zentrum P und der Inzidenzebene σ dargestellt wird. Die Punkte des $\mathfrak{R}_4$ werden demnach durch das Zweispurenprinzip umkehrbar eindeutig auf die *perspektiven Kollineationen* des Bildraums

abgebildet, deren Inzidenzebene σ ist; die mit P^0 inzidenten Geraden, Ebenen und Räume des $\mathfrak{R}_4$ werden durch die Punktepaare, Geradenpaare bzw. Ebenenpaare der Kollineation dargestellt. Die Kollineation, durch die ein Punkt P^0 des Spurraums Σ_1^0 abgebildet wird, ist singulär mit P als singulärem Punkt im ersten und σ als singulärer Ebene im zweiten Bildsystem; bei den Punkten von Σ_2^0 ist es umgekehrt. Gerade Punktreihen, ebene Punktfelder und lineare Punkträume werden durch die Büschel, Bündel und Gebüsche perspektiver Kollineationen mit der Inzidenzebene σ dargestellt, die ein Punktepaar, Geradenpaar oder Ebenenpaar gemein haben. Insbesondere wird jeder Sehstrahl auf die Kollineationen mit dem gleichen Zentrum und der gleichen Inzidenzebene abgebildet; jede Sehebene, bzw. jeder Sehraum auf die Kollineationen mit der Inzidenzebene σ , deren Zentren auf einer Geraden, bzw. in einer Ebene liegen. Man kann somit sagen:

Satz 1: *Wird der projektive vierdimensionale Raum $\mathfrak{R}_4$ durch ein allgemeines Zweispurensystem auf den Bildraum Δ abgebildet, so werden die Punkte des $\mathfrak{R}_4$ durch die perspektiven Kollineationen von Δ dargestellt, die die Spurebene σ zur Inzidenzebene haben; die Geraden werden durch die orientierten Punktepaare, die Ebenen und Räume durch die orientierten, einander in σ schneidenden Geraden- bzw. Ebenenpaare von Δ dargestellt.*

Da die Angabe von Z^0 , Σ_1^0 , Σ_2^0 an insgesamt zwölf, die von σ an drei Parameter gebunden ist, so gehören zu einem und demselben Bildsystem ∞^9 verschiedene Raumsysteme, die untereinander kollinear verwandt sind. Wenn σ^0 dem Verschwindungsraum $Z^0 // \Delta$ angehört, so ist σ die Fernebene von Δ . An die Stelle von Satz 1 tritt in diesem Fall der

Satz 1, a: *Wird der Raum $\mathfrak{R}_4$ durch ein Zweispurensystem mit Fernspurebene abgebildet, so wird jeder Punkt des $\mathfrak{R}_4$ durch eine räumliche zentrische Ähnlichkeit, jede Gerade durch ein orientiertes Punktepaar, jede Ebene durch ein orientiertes Parallelgeradenpaar und jeder Raum durch ein orientiertes Parallelebenenpaar des Bildraums dargestellt.*

Im Falle $\Sigma_1^0 = \Delta$ und $\Sigma_2^0 = \infty$ liegt der bekannte Zentralriß des $\mathfrak{R}_4$ vor⁵; bei dieser Annahme sind die Ebenen σ^0 , σ in der Fernebene von Δ vereinigt.

2. Durch die vorstehenden Sätze wird die Geometrie des $\mathfrak{R}_4$ auf die Geometrie der orientierten Elementenpaare im Bildraum Δ übertragen. Da zur Darstellung der Grundelemente des $\mathfrak{R}_4$ nur die Angabe der

⁵ Vgl. z. B. H. de Vries: Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raum, Leipzig 1905.

Spurebene σ erforderlich ist, so ist auch die Darstellung aller Lagenbeziehungen nur an die Annahme von σ gebunden; einige Lagenbeziehungen sind in Abb. 2 dargestellt.

Die Verbindungsgerade g^0 zweier Punkte A^0, B^0 wird auf das gemeinsame Punktpaar (G_1, G_2) der beiden perspektiven Kollineationen abgebildet, durch die die Punkte A^0, B^0 dargestellt werden. Sind die Kollineationen durch ihre Zentren A, B , die Inzidenzebene σ und die auf je einem Kollineationsstrahl a , bzw. b liegenden Punktpaare $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ gegeben, so ersetzt man zunächst das Paar (A_1, A_2) der Bildkollineation von A^0 durch das Bildpaar (H_1, H_2) einer mit A^0 inzidenten Geraden h^0 , die b^0 scheidet. Wählt man z. B. $H_2 = B_2$, so ergibt sich H_1 in bekannter Weise; die Gerade $e_1 = [B_1 H_1]$ schneidet $g = [AB]$ im Punkte G_1 , die ihr kollinear zugeordnete Geraden e_2 trifft g in G_2 . Die Geraden e_1, e_2 stellen zugleich die Bildspuren der Ebene $\varepsilon^0 = [A^0 b^0] = [b^0 g^0]$ dar; die Geraden $f_1 = [A_1 G_1], f_2 = [A_2 G_2]$ sind die Bildspuren der Ebene $\varphi^0 = [a^0 g^0] = [a^0 B^0]$.

Der Verbindungsraum $\mathfrak{R}^0$ zweier Geraden allgemeiner Lage a^0, b^0 wird auf die Ebenen ϱ_1, ϱ_2 abgebildet, die einander in einer Geraden r von σ schneiden und von denen die eine die Bildspurpunkte A_1, B_1 von a^0, b^0

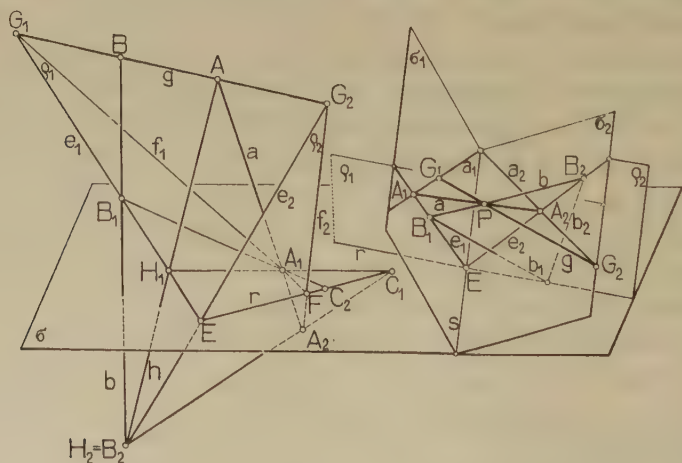


Abb. 2

enthält, während die andere die Punkte A_2, B_2 miteinander verbindet. Die Gerade r läuft daher durch die Punkte $C_2 = [A_1 B_1 \cdot \sigma]$ und $C_1 = [A_2 B_2 \cdot \sigma]$; die Ebenen ϱ_1, ϱ_2 sind $[A_1 B_1 C_1]$, bzw. $[A_2 B_2 C_2]$.

Der Raum $\mathfrak{R}^0$ ergibt sich auch durch die Verbindung der Geraden g^0 mit der Ebene $[a^0 h^0]$, die g^0 in A^0 schneidet oder durch Verbindung der einander in g^0 schneidenden Ebenen ε^0, φ^0 .

Die *Schnittebene* ε^0 zweier Räume $\mathfrak{R}^0, \mathfrak{S}^0$, die durch die Ebenenpaare $(\varrho_1, \varrho_2), (\sigma_1, \sigma_2)$ dargestellt sind, wird auf die Geraden $e_1 = [\varrho_1 \sigma_1]$, $e_2 = [\varrho_2 \sigma_2]$ abgebildet, die einander im Schnittpunkt E der in σ liegenden Spuren r, s von ϱ_1, σ_1 treffen. Die Schnittgerade a^0 von $\mathfrak{R}^0$ mit einer willkürlichen, $\mathfrak{R}^0$ nicht angehörigen Ebene α^0 , die durch das Bildpaar (a_1, a_2) gegeben ist, wird durch das Punktepaar $A_1 = [a_1 \varrho_1]$, $A_2 = [a_2 \varrho_2]$ dargestellt; bezeichnet $\mathfrak{S}^0$ einen mit α^0 inzidenten Raum und ε^0 dessen Schnittebene mit $\mathfrak{R}^0$, so ergeben sich die Punkte A_1, A_2 auch durch den Schnitt der Geraden a_1, e_1 einerseits bzw. a_2, e_2 anderseits. Der Schnittpunkt P^0 von $\mathfrak{R}^0$ mit einer willkürlichen, $\mathfrak{R}^0$ nicht angehörigen Geraden g^0 wird auf die perspektive Kollineation mit der Inzidenzebene σ abgebildet, die durch die Bildpaare $(\varrho, \varrho_2), (G_1, G_2)$ von $\mathfrak{R}^0$ und g^0 bestimmt ist. Verwendet man zur Darstellung von P^0 eine mit g^0 inzidente Ebene α^0 und deren Schnittgerade a^0 mit $\mathfrak{R}^0$, so ergibt sich das Zentrum der Kollineation im Schnittpunkt P der Geraden $a = [A_1 A_2]$, $g = [G_1 G_2]$.

Der *Schnittpunkt* P^0 zweier Ebenen allgemeiner Lage α^0, β^0 des $\mathfrak{R}_4$ wird durch die perspektive Kollineation mit der Inzidenzebene σ dargestellt, die durch die Bildspurgeraden $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ der Ebenen bestimmt ist. Bezeichnet $\mathfrak{S}^0$ einen mit α^0 und $\mathfrak{R}^0$ einen mit β^0 inzidenten Hilfsraum, so ergibt sich P^0 als Schnittpunkt der beiden Geraden a^0, b^0 , in denen die Ebenen α^0, β^0 von der Ebene $\varepsilon^0 = [\mathfrak{R}^0 \mathfrak{S}^0]$ getroffen werden. Die Räume $\mathfrak{S}^0, \mathfrak{R}^0$ werden durch zwei mit (a_1, a_2) , bzw. (b_1, b_2) inzidente Ebenenpaare $(\sigma_1, \sigma_2), (\varrho_1, \varrho_2)$ dargestellt; die Ebene ε^0 besitzt das Bildpaar $e_1 = [\varrho_1 \sigma_1]$, $e_2 = [\varrho_2 \sigma_2]$. Die Bildspurpunkte der Geraden a^0, b^0 sind die Punkte $A_1 = [a_1 e_1]$, $A_2 = [a_2 e_2]$ bzw. $B_1 = [b_1 e_1]$, $B_2 = [b_2 e_2]$; der Bildpunkt P von P^0 ist der Schnittpunkt der Geraden $a = [A_1 A_2]$, $b = [B_1 B_2]$.

3. Die von den Treffgeraden bestimmter Geraden oder Ebenen des $\mathfrak{R}_4$ gebildeten Mannigfaltigkeiten werden durch das Zweispurenprinzip auf *Punktverwandtschaften im Darstellungsraum* Δ abgebildet; einige derselben seien im folgenden kurz charakterisiert.

Die *Treffgeraden einer Geraden* a^0 bilden eine vierparametrische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^0$. Die Bildspurpunkte G_1, G_2 aller dieser Geraden g^0 gehören einander entsprechenden Strahlen a_1, a_2 der durch σ perspektiv aufeinander bezogenen Bündel an, deren Scheitel die Bildspurpunkte A_1, A_2 von a^0 sind (Abb. 3). Die Trägergeraden g der Paare (G_1, G_2)

erfüllen das Gebüsch mit der Achse $a = [A_1 A_2]$; die Geraden a, g schneiden σ in den Punkten A, G und treffen einander in G_a . Die ∞^1 Paare, die auf einer und derselben Geraden g liegen, bilden die *Projektivität* mit den Doppelpunkten G, G_a und dem charakteristischen Doppelverhältnis $(AG_a A_1 A_2)$. Die ∞^1 Geraden der $\mathcal{M}_4^0$, die denselben ersten Bildspurpunkt G_1 haben, werden im zweiten Bild auf die Punkte G_2 der Geraden a_2 abgebildet, die der Geraden $a_1 = [A_1 G_1]$ perspektiv zugeordnet ist. Jedem Punkt G_1 von Δ entspricht in diesem Sinn ein Strahl a_2 des Bündels A_2 . Einer geraden Punktreihe $b_1(G_1 \dots)$ wird das Strahlbüschel $A_2(\beta_2)$ der Ebene β_2 projektiv zugeordnet, deren in σ liegende Spur b die Spurpunkte A_{12}, B_{12} der Geraden a_1, b_1 miteinander verbindet (bei der in Abb. 3 gewählten Schrägrißdarstellung ist $b \perp \sigma$ vorausgesetzt).

Die *Treffgeraden einer Ebene ε^0* bilden eine fünfparametrische Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_5^0$. Die Bildspurpunkte G_1, G_2 dieser Geraden g^0 gehören einander entsprechenden Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ der durch σ perspektiv aufeinander bezogenen Büschel an, deren Achsen die Bildspurgeraden

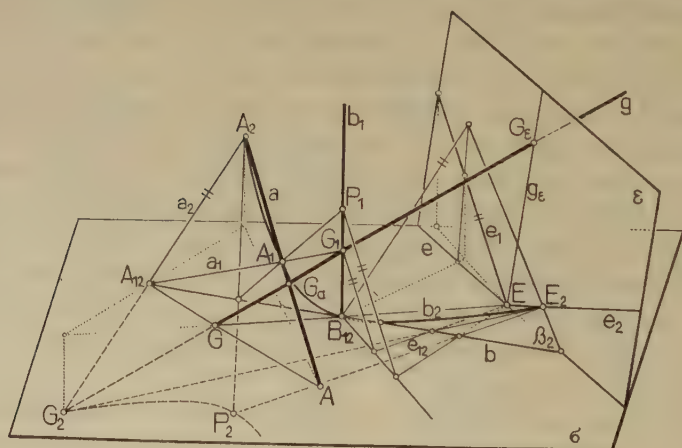


Abb. 3

e_1, e_2 von ε^0 sind; die Ebene $\varepsilon = [e_1 e_2]$ schneidet σ in der durch den Punkt $E = [e_1 e_2]$ laufenden Geraden e . Jede Gerade g des Bildraums Δ trägt ∞^1 Bildpaare (G_1, G_2) . Die Ebenen σ, ε schneiden g in den Punkten G, G_e ; die Ebenen $\varepsilon, [Eg]$ treffen einander in der Geraden $g_e = [EG_e]$. Die auf g liegenden Paare (G_1, G_2) bilden die *Projektivität* mit den Doppel-

punkten G, G_e und dem charakteristischen Doppelverhältnis ($eg_e e_1 e_2$). Die ∞^2 Geraden der $\mathfrak{M}_5^0$, die denselben ersten Bildspurpunkt G_1 haben, werden im zweiten Bild durch die Punkte G_2 der Ebene ε_2 dargestellt, die e_2 mit der in σ liegenden Spur e_{12} der Ebene $\varepsilon_1 = [G_1 e_1]$ verbindet. Jedem Punkt G_1 von Δ entspricht in diesem Sinn eine durch e_2 laufende Ebene ε_2 ; jeder geraden Punktreihe $b_1(G_1 \dots)$ wird das Ebenenbüschel $e_2(\varepsilon_2 \dots)$ projektiv zugewiesen.

Die *gemeinsamen Treffgeraden* von a^0 und ε^0 erfüllen eine dreiparametrische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^0$. Die Bildspurpunkte G_1, G_2 dieser Geraden g^0 gehören nach dem Gesagten einerseits einander entsprechenden Geraden a_1, a_2 der perspektiven Bündel A_1, A_2 , anderseits einander entsprechenden Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ der perspektiven Büschel e_1, e_2 an. Die Trägergeraden g der Paare (G_1, G_2) bilden das Gebüsch mit der Achse $a = [A_1 A_2]$. Jede Gerade g des Gebüsches trägt *ein einziges Paar* (G_1, G_2) , nämlich das gemeinsame Paar der beiden Projektivitäten, die von den auf g liegenden Bildpaaren der Treffgeraden von g^0 , bzw. ε^0 gebildet werden und die beide den Spurpunkt G von g zum Doppelpunkt haben. Jeder Punkt G_1 ist der erste Bildspurpunkt *einer bestimmten Geraden* g^0 der $\mathfrak{M}_3^0$; der zweite Bildspurpunkt von g^0 ist der Schnittpunkt G_2 der Geraden a_2 , die $a_1 = [A_1 G_1]$ in der Perspektivität zwischen den Bündeln A_1, A_2 entspricht, mit der Ebene ε_2 , die $\varepsilon_1 = [e_1 G_1]$ in der zwischen den Büscheln e_1, e_2 bestehenden Perspektivität zugeordnet ist. Die Geraden der $\mathfrak{M}_3^0$ werden daher durch eine *umkehrbar eindeutige Punktverwandtschaft im Bildraum Δ* dargestellt. Die Geraden a_2 , die den Punkten G_1 einer Geraden b_1 zugewiesen sind, erfüllen das zur Reihe $b_1(G_1 \dots)$ projektive Strahlbüschel $A_2(a_2 \dots)$ der Ebene β_2 ; die denselben Punkten zugeordneten Ebenen ε_2 bilden das zur gleichen Reihe projektive Büschel $e_2(\varepsilon_2 \dots)$. Die Büschel $A_2(a_2 \dots)$, $e_2(\varepsilon_2 \dots)$ sind daher gleichfalls projektiv aufeinander bezogen; das Erzeugnis dieser Verwandtschaft, d. h. der geometrische Ort der den Punkten G_1 von b_1 zugeordneten Punkten G_2 , ist ein *Kegelschnitt* b_2 der Ebene β_2 . Die in Rede stehende Verwandtschaft ist also *quadratisch*; die Ebene σ entspricht sich punktweise selbst. Der Kegelschnitt b_2 läuft durch den in σ liegenden Punkt B_{12} von b_1 und die Projektivität, die zwischen den Reihen $b_1(G_1 \dots)$, $b_2(G_2 \dots)$ besteht, hat in B_{12} einen selbstentsprechenden Punkt. Das Erzeugnis dieser Projektivität, d. h. der geometrische Ort der Trägergeraden g der Punktepaare (G_1, G_2) , ist demnach die durch die Leitgeraden a, b_1 und den Kegelschnitt b_2 bestimmte *Regelschar zweiten Grades*. b_2 schneidet die Geraden a, b_1 in den Punkten

A_2, B_{12} und die Gerade e_2 in deren Schnittpunkt E_2 mit β_2 ; die Darstellung beliebiger, den Punkten P_1 von b_1 projektiv zugeordneter Punkte P_2 ist der Abb. 3 zu entnehmen. Wir können sohin feststellen

Satz 2: *Die Mannigfaltigkeit M_3^0 der gemeinsamen Treffgeraden einer Geraden und einer Ebene des $\mathfrak{R}_4$ wird durch das allgemeine Zweispurenprinzip auf eine umkehrbar eindeutige quadratische Verwandtschaft des Bildraums abgebildet, bei der sich die Spurebene σ punktweise selbst entspricht. Das Erzeugnis der Verwandtschaft ist ein Gebüsch; das auf einem Strahl desselben liegende Punktepaar ist das gemeinsame Paar zweier Projektivitäten, die einen gemeinsamen Doppelpunkt in σ haben. Die Geraden der $\mathfrak{M}_3^0$, die eine Gerade eines Spurraums schneiden, werden durch eine Projektivität zwischen den Punkten einer Geraden und denen eines Kegelschnitts dargestellt, der die Gerade in σ schneidet.*

Durch jeden Punkt P^0 des $\mathfrak{R}_4$, der weder a^0 noch ε^0 angehört, läuft eine Gerade g^0 der $\mathfrak{M}_3^0$; diese enthält den Schnittpunkt G_a^0 des Raums $[P^0 \varepsilon^0]$ mit a^0 und den Schnittpunkt G^0 der Ebenen $[P^0 a^0]$, ε^0 . Das Bildpaar (G_1, G_2) von g^0 ist das Punktepaar der Bildkollineation von P^0 , das in Verbindung mit dem Punktepaar (A_1, A_2) ein mit σ inzidentes Geradenpaar und zugleich in Verbindung mit dem Geradenpaar (e_1, e_2) ein mit σ inzidentes Ebenenpaar ergibt. Ist die Darstellung dieses Paares als Aufgabe der Geometrie des $\mathfrak{R}_3$ gegeben, so kann seine Ermittlung durch Verwendung des oben beschriebenen Zusammenhangs im $\mathfrak{R}_4$ vorgenommen werden, wobei jede Konstruktion in Δ ihre vierdimensionale Deutung erhält.

4. Die gemeinsamen Treffgeraden zweier Geraden a^0, b^0 des $\mathfrak{R}_4$ gehören dem Verbindungsraum $\mathfrak{R}^0 = [a^0 b^0]$ an und bilden daher in diesem ein Netz $\mathfrak{N}^0$. Sind die Geraden a^0, b^0 durch ihre Bildspurpunkte $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ in Δ gegeben, so findet man die Bildspurebenen ϱ_1, ϱ_2 von $\mathfrak{R}^0$ nach Nr. 2: Die in σ liegende Spur r der beiden Ebenen verbindet die Spurpunkte C_1, C_2 der Geraden $[A_2 B_2], [A_1 B_1]$ miteinander (Abb. 4), $\varrho_1 = [A_1 B_1 C_1]$, $\varrho_2 = [A_2 B_2 C_2]$. Die Bildspurpunkte G_1, G_2 der Netzgeraden g^0 sind nach Nr. 3 an je zwei Strahlen a_1, a_2 bzw. b_1, b_2 der durch r perspektiv aufeinander bezogenen Büschel $A_1(\varrho_1), A_2(\varrho_2)$ bzw. $B_1(\varrho_1), B_2(\varrho_2)$ gebunden; die Trägergeraden g der Bildspurpunkte bilden daher das Netz $\mathfrak{N}$ mit den Leitgeraden $a = [A_1 A_2]$, $b = [B_1 B_2]$. Die Abbildung des Netzes $\mathfrak{N}^0$ nach dem Zweispurenprinzip ergibt demnach die umkehrbar eindeutige, i. a. quadratische Verwandtschaft zwischen den ebenen Feldern, in denen das Netz $\mathfrak{N}$ die Ebenen ϱ_1, ϱ_2 schneidet⁶. Die Punkte

⁶ Vgl. E. Müller — E. Kruppa, a. a. O. Nr. 29.

A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 bilden die Hauptdreiecke der Verwandtschaft; jeder Ecke des einen Dreiecks entsprechen alle Punkte einer Seite des andern, die Gerade r entspricht sich punktweise selbst.

Satz 3: Die gemeinsamen Treffgeraden zweier Geraden a^0, b^0 des $\mathfrak{R}_4$ bilden ein Netz $\mathfrak{N}^0$, dessen Zentralriß im Bildraum ein Netz $\mathfrak{N}$ ist. Das Netz $\mathfrak{N}^0$ wird durch das allgemeine Zweispurenprinzip auf die umkehrbar eindeutige, i. a. quadratische Punkteverwandtschaft abgebildet, die das Netz $\mathfrak{N}$ in den Bildpurebenen des Raumes $[a^0 b^0]$ hervorruft.

Jede das Bildnetz $\mathfrak{N}$ betreffende Konstruktion erfährt durch diesen Zusammenhang ihre überräumliche Deutung: Ist z. B. eine Gerade t des Bildraumes Δ durch ihre in ϱ_1, ϱ_2 liegenden Spurpunkte T_1, T_2

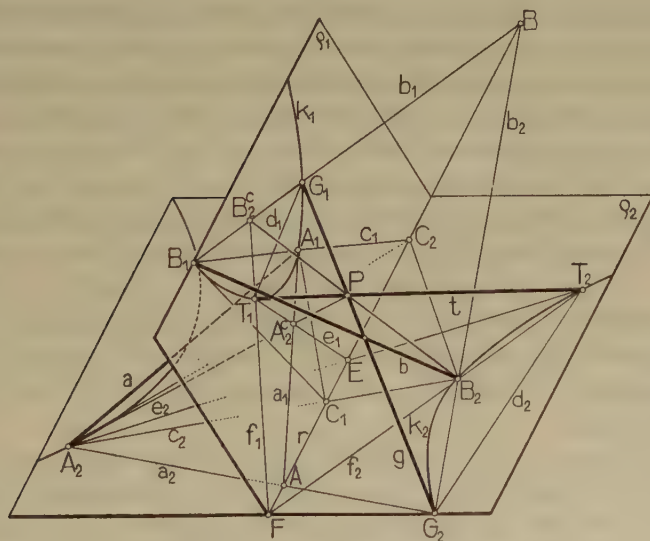


Abb. 4

gegeben, so findet man die mit irgendeinem Punkt P von t inzidente Netzgerade g als Schnittgerade der Ebenen $\alpha = [Pa]$, $\beta = [Pb]$ bekanntlich in folgender Weise: Die Ebenen $\varepsilon = [A_2 t]$, $\varphi = [B_2 t]$ schneiden ϱ_2 in den Spuren $e_2 = [A_2 T_2]$, $f_2 = [B_2 T_2]$, die r in den Punkten E, F treffen; die Geraden $e_1 = [ET_1]$, $f_1 = [FT_1]$ sind die in ϱ_1 liegenden Spuren von ε, φ . Die Gerade $[A_2 P]$ gehört den Ebenen α, ε an; ihr in ϱ_1 befindlicher Spurpunkt A_2' liegt daher auf e_1 und ergibt in Verbindung mit A_1 die Spur a_1 von α ; die Spur a_2 verbindet A_2 mit dem Achsenpunkt A von a_1 . In derselben Weise ergeben sich die Spuren b_1, b_2 von β ;

die Spurpunkte G_1, G_2 von g sind die Schnittpunkte $[a_1 b_1]$, $[a_2 b_2]$. Betrachtet man die Punkte (A_1, A_2) , (B_1, B_2) als Bildspurpunkte der Geraden a^0, b^0 des $\mathfrak{R}_4$, so stellt das Paar (G_1, G_2) die Bildspurpunkte der Treffgeraden g^0 von a^0, b^0 dar, die mit dem Punkte P^0 inzident liegt, dessen Bildkollineation durch das Zentrum P , die Inzidenzebene σ und das Bildpaar (T_1, T_2) einer durch P^0 laufenden Geraden t^0 gegeben ist; da P^0 dem Raum $\mathfrak{R}^0 = [a^0 b^0]$ angehört, so ist T_1 in ϱ_1 und T_2 in ϱ_2 anzunehmen. Die Ermittlung des Paares (G_1, G_2) der Kollineation, das zugleich das Bildpaar eines Netzstrahls g^0 ist, führt genau auf die oben beschriebene Konstruktion: Um etwa a_1 zu finden, ersetzt man das Paar (T_1, T_2) durch das Paar $(H_1 = A_2^c, H_2 = A_2)$ der Kollineation (vgl. Nr. 2). Da die in ϱ_1, ϱ_2 liegenden Felder einerseits durch die Kollineation mit dem Zentrum P , anderseits durch die Netzprojektion aufeinander bezogen sind, so stellen die Punkte G_1, G_2 *das gemeinsame Paar dieser beiden Verwandtschaften* dar. Man findet sie daher auch durch die folgende Überlegung: Man denkt das in ϱ_2 befindliche Feld aus P auf die Ebene ϱ_1 projiziert und erhält hiedurch als Bild der netzperspektivischen Verwandtschaft, die zwischen den in ϱ_1 und ϱ_2 liegenden Feldern besteht, eine quadratische Verwandtschaft in ϱ_1 , die einen nicht auf r liegenden Doppelpunkt besitzt, nämlich den Schnittpunkt G_1 der zum Augpunkt P gehörigen Zentralrisse $a_1 = [A_1 A_2^c]$, $b_1 = [B_1 B_2^c]$ der Geraden a, b ; der Punkt G_2 entspricht G_1 sowohl kollinear als auch netzperspektivisch. Da die Geraden g^0, t^0 einer mit P^0 inzidenten Ebene δ^0 angehören, so schneiden die Geraden $d_1 = [G_1 T_1]$, $d_2 = [G_2 T_2]$ einander auf r .

Alle Geraden g^0 des Netzes $\mathfrak{R}^0$, die die Gerade t^0 treffen, sind Erzeugende der durch die Leitgeraden a^0, b^0, t^0 bestimmten *Regelfläche zweiten Grades* Φ^0 . Die Bildspurpunkte G_1, G_2 der Geraden bilden projektive Punktreihen auf zwei durch A_1, B_1, T_1 bzw. A_2, B_2, T_2 laufenden *Kegelschnitten* k_1, k_2 , die einander netzperspektivisch zugeordnet sind; die Quadrik Φ , die das Erzeugnis dieser Projektivität ist, bildet den zum Augpunkt Z^0 gehörigen Zentralriß von Φ^0 . Wenn die Gerade t^0 einem Spurraum, etwa Σ_1^0 angehört, so ist ϱ_1 eine Tangentialebene von Φ . An die Stelle des Kegelschnittes k_1 tritt in diesem Fall eine Gerade t_1 und $c_1 = [A_1 B_1]$; der Kegelschnitt k_2 enthält den auf r liegenden Punkt von t_1 und C_2 . Betrachtet man t^0 als Schnittgerade des Netzraums $\mathfrak{R}^0$ mit einer willkürlichen Ebene ε^0 des $\mathfrak{R}_4$, so stellt die zwischen der Geraden t_1 und dem Kegelschnitt k_2 bestehende Projektivität zugleich das Bild der Quadrik dar, die von den *gemeinsamen*

Treffgeraden der Geraden a^0, b^0 und der Ebene ε^0 gebildet wird (vgl. Schluß von Satz 2).

5. Die gemeinsame Treffgerade dreier Geraden a^0, b^0, c^0 des $\mathfrak{R}_4$ ist die Schnittgerade der Verbindungsräume $\mathfrak{R}^0, \mathfrak{S}^0, \mathfrak{T}^0$ von je zweien der Geraden und daher die den Schnittebenen $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ von je zweien der Räume gemeinsame Gerade g^0 . Sind die Geraden a^0, b^0, c^0 durch ihre Bildspurpunkte $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2)$ in Δ gegeben (Abb. 5), so findet man die in σ liegenden Spuren r, s, t der die Räume darstellenden Ebenenpaare $(\varrho_1, \varrho_2), (\sigma_1, \sigma_2), (\tau_1, \tau_2)$, indem man die Spurpunkte $R_1, S_1, T_1; R_2, S_2, T_2$ der Seiten der Dreiecke $A_2B_2C_2, A_1B_1C_1$ ermittelt und einander entsprechende Punkte miteinander verbindet; $r = [R_1R_2]$, $s = [S_1S_2]$, $t = [T_1T_2]$. Die Ecken A, B, C des von den Geraden r, s, t gebildeten Dreiecks ergeben in Verbindung mit den Punkten A_1, B_1, C_1 einerseits bzw. A_2, B_2, C_2 andererseits die Bildspurpaare $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ der Ebenen $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$; die Scheitel G_1, G_2 der durch die Kanten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2 bestimmten Pyramiden sind die Bildspurpunkte von g^0 . Somit gilt

Satz 4: Die gemeinsame Treffgerade dreier Geraden des $\mathfrak{R}_4$ wird beim allgemeinen Zwispurenprinzip durch die Punkte des Bildraums dar-

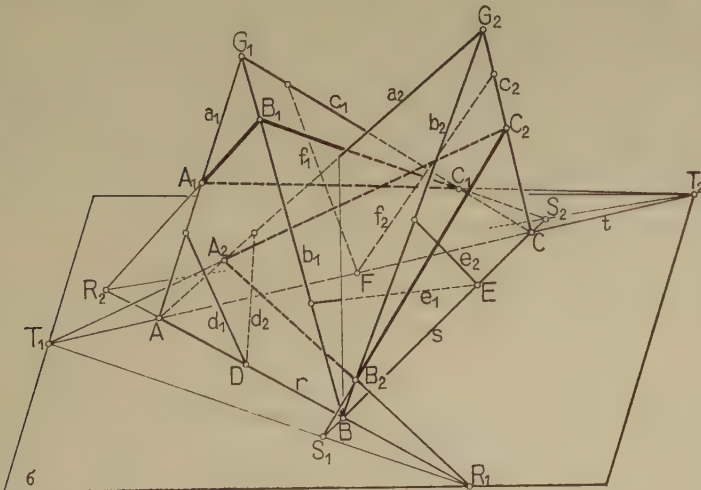


Abb. 5

gestellt, aus denen die ersten Bildspurpunkte der drei Geraden einerseits, ihre zweiten Bildspurpunkte andererseits in die Eckpunkte eines und des-

selben Dreiecks der Spurebene projiziert werden. Bei Abbildung mit Fernspurebene werden die Bildspurpunkte der Geraden aus den beiden Punkten durch die Kanten zweier parallel liegender Dreikante projiziert.

Die gemeinsamen Treffgeraden dreier Ebenen $\delta^0, \varepsilon^0, \varphi^0$ des $\mathfrak{R}_4$ bilden eine dreiparametrische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^0$. Jede Gerade g^0 der $\mathfrak{M}_3^0$ kann als Schnittgerade irgend dreier Räume $\mathfrak{R}^0, \mathfrak{S}^0, \mathfrak{T}^0$ dargestellt werden, von denen jeder mit einer der drei Ebenen inzident liegt. Sind die Ebenen $\delta^0, \varepsilon^0, \varphi^0$ durch ihre Bildspurpaare $(d_1, d_2), (e_1, e_2), (f_1, f_2)$ gegeben, so kann man irgend drei Gerade r, s, t von σ , von denen die eine durch den Punkt $D = [d_1 d_2]$, die zweite durch $E = [e_1 e_2]$ und die dritte durch $F = [f_1 f_2]$ läuft, als Spuren der Bildpaare $(\varrho_1, \varrho_2), (\sigma_1, \sigma_2), (\tau_1, \tau_2)$ von $\mathfrak{R}^0, \mathfrak{S}^0, \mathfrak{T}^0$ annehmen. Die Bildspurpunkte G_1, G_2 von g^0 ergeben sich wie oben als Scheitel der beiden Pyramiden, deren Seitenflächen die Ebenen $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1$ bzw. $\varrho_2, \sigma_2, \tau_2$ sind. Da die Geraden d_1, e_1, f_1 bzw. d_2, e_2, f_2 der Reihe nach den Ebenen $\varrho_1, \sigma_1, \tau_1$ bzw. $\varrho_2, \sigma_2, \tau_2$ angehören, so kann als Seitenstück zu Satz 4 festgestellt werden

Satz 5: Jede gemeinsame Treffgerade dreier Ebenen des $\mathfrak{R}_4$ wird beim allgemeinen Zweispurenprinzip auf zwei Punkte des Bildraums abgebildet, aus denen die ersten Bildspurgeraden der Ebenen einerseits, ihre zweiten Bildspurgeraden anderseits in die Seiten eines und desselben Dreiecks der Spurebene projiziert werden. Bei Abbildung mit Fernspurebene werden die Bildspurgeraden der Ebenen aus den beiden Punkten durch die Seitenflächen zweier parallel liegender Dreikante projiziert.

Über einige andere, die Zweispurendarstellung der $\mathfrak{M}_3^0$ betreffende Beziehungen soll in einer späteren Note berichtet werden.

Der Hjelmslevsche Mittelliniensatz und verwandte Sätze

Von

Frank Löbell, München

Herrn Prof. Dr. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 2. Januar 1961)

Die folgenden Ausführungen befassen sich mit einigen Tatsachen der absoluten Geometrie.

Der Hjelmslevsche Mittelliniensatz besagt bekanntlich: *Sind in einer Ebene zwei kongruente Punktreihen gegeben, so liegen die Mittelpunkte aller Paare entsprechender Punkte auf einer Geraden*, speziell können sie sogar in einen Punkt zusammenfallen.

Diesen Satz findet man nicht immer auf so durchsichtige Art bewiesen, wie es seinem Wesen entspricht, obwohl ihn sein Entdecker schon auf denkbar einfachstem Weg begründet hat:¹ Die eine Punktreihe läßt sich stets durch eine Umlegung² der Ebene in die andere überführen; aus dem Begriff der Gleitspiegelung ergibt sich aber unmittelbar, daß die Zentren entsprechender Punktepaare auf der Gleitachse liegen müssen, daß sie dabei, wenn die Träger der Punktreihen auf dieser Achse senkrecht stehen, alle zusammenfallen, und zwar in dem dann vorhandenen Symmetriezentrum der beiden Punktreihen.

Man braucht beim Hjelmslevschen Satz jedoch nicht nur an gerade Punktreihen zu denken; ersichtlich gilt er auch, wenn ihre Träger

¹ J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie. Math. Ann. 64 (1907), S. 459; vgl. auch F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959, S. 54.

Es ist, mit allen Konsequenzen, zu bedenken, daß in der elliptischen Geometrie jedes Punktepaar zwei Mittelpunkte besitzt.

² Die Ausdrücke „Bewegung“ und „Umlegung“ werden hier in der Bedeutung angewandt, die ihnen *Study* gegeben hat, der die im folgenden herangezogene, auf *Gauß* zurückgehende, meist nach *Wiener* benannte Methode der Zusammensetzung der Bewegungen und Umlegungen aus Spiegelungen an Punkten, Geraden und Ebenen vollkommen ausgebaut hat.

krummlinig sind, wenn nur *die Punktreihen samt ihren Trägerkurven in ihrer Ebene gegensinnig kongruent* sind. Daß alle Mittelpunkte entsprechender Punktepaare zusammenfallen, ist dann allerdings nicht möglich; dies tritt nur ein, wenn zentrisch symmetrische Lage, also ein Sonderfall gleichsinniger Kongruenz in der Ebene vorliegt.

Es erscheint merkwürdig, daß der Hjelmsslevsche Satz von den Eigenschaften des Paares kongruenter Punktreihen, die sich aus dem Begriff der Gleitspiegelung ergeben, gerade nur eine hervorhebt; aber das ist durch den Zusammenhang bedingt, in dem der Satz zum ersten Male ausgesprochen wurde. An sich sind die weiteren, aus dieser Betrachtungsweise folgenden Eigenschaften ebenso interessant, etwa die folgende: Alle Paare entsprechender Punkte projizieren sich auf die Gleitachse als Punktepaare gleichen Abstandes.

Man kann aber auch die Folgerungen aus der Tatsache betrachten, daß sich zwei kongruente, derselben Ebene angehörige, gerade Punktreihen stets durch eine Drehung in einander überführen lassen — deren Pol natürlich auch ein Fernpunkt, ein Ende oder ein nicht unendlichferner, uneigentlicher Punkt sein kann —; man erkennt: *Die Symmetrieachsen aller Paare entsprechender Punkte gehören einem Büschel an*; die durch je zwei entsprechende Punkte gehenden Paare von Büschelgeraden haben alle gleiches Maß.

Der Hjelmsslevsche Satz läßt sich noch in ganz anderer Richtung verallgemeinern: er gilt auch, wenn die beiden Trägergeraden der kongruenten Punktreihen windschief sind. Dann läßt sich nämlich die eine stets durch eine Umschraubung³ in die andere überführen. Dies erkennt man so: Spiegelt man den Raum am Mittelpunkt eines beliebigen der Paare entsprechender eigentlicher Punkte, so geht die erste Punktreihe in eine solche über, die mit der zweiten ein Paar zusammenfallender entsprechender Punkte gemein hat und daher durch Spiegelung an einer der beiden Symmetrieebenen der beiden nunmehr sich schneidenden Geraden in die zweite Punktreihe übergeht. Die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an einem Punkt und an einer Ebene ist aber eine Umschraubung. Aus dem Begriff der Umschraubung ergibt sich, daß der Satz von Hjelmsslev auch hier gilt.

Auch die weiteren, oben gemachten Aussagen gelten noch, wenn an die Stelle der Symmetrieachsen je zweier entsprechender Punkte ihre Symmetrieebenen gesetzt werden; dies folgt daraus, daß die beiden

³ D. i. eine Schraubung, deren Drehwinkel zwei Rechte beträgt.

windschiefen Punktreihen auch durch eine Drehung des Raumes ineinander übergeführt werden können, wie man erkennt, wenn man die erste Punktreihe zunächst durch Spiegeln an der Symmetrieebene irgend eines Paares entsprechender Punkte, statt an ihrem Symmetriezentrum, transformiert und dann weiter wie oben verfährt. Die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an zwei Ebenen ist aber eine Drehung des Raumes⁴.

Die Verallgemeinerung des Hjelmslevschen Satzes läßt sich aber noch weiter treiben: *er gilt ersichtlich sogar für zwei indirekt kongruente Punktfelder einer und derselben Ebene*. Auch die erste der oben zusätzlich gemachten Aussagen gilt dann, während die zweite dieser Aussagen für zwei direkt kongruente Punktfelder einer Ebene richtig ist, in welchem Fall jedoch der ursprüngliche Hjelmslevsche Satz nur in Sonderfällen gilt.

Gehören schließlich die Felder nicht einer Ebene an, so kann man wenigstens sagen, daß die *Mittelpunkte je zweier entsprechender Punkte in einer Ebene* liegen, nämlich in der Gleitebene der Umlegung, durch die das eine Feld in das andere übergeführt werden kann; sie können sogar auf einer Geraden liegen oder in einen Punkt zusammenfallen.

Man kann auch daran denken, den Satz von Hjelmslev, soweit es möglich ist, zu dualisieren: Hat man in einer Ebene zwei gleichsinnig *kongruente Geradenbüschel*, so gibt es — die Büschelgeraden seien nicht gerichtet — zwei Drehungen, die das eine Büschel in das andere überführen. Daher bilden die Symmetrieachsen je zweier entsprechender Büschelgeraden zwei Büschel mit den Drehpolen als Scheiteln, die in einem trivialen Spezialfall zusammenfallen können. Sind zwei Geradenbüschel einer Ebene ungleichsinnig kongruent, so gibt es zwei Umlegungen, die das eine in das andere überführen; aus dem Begriff der Gleitspiegelungen ergibt sich, daß auch hier die Symmetrieachsen je zweier entsprechender Büschelgeraden zwei Büscheln angehören, nämlich den Büscheln der Lote der Gleitachsen. Auch in diesen Fällen lassen sich metrische Eigenschaften der Büschel feststellen.

In ähnlicher Weise kann man noch weitere Fragen stellen, z. B. solche, die kongruente Ebenenbüschel und -bündel im Raum betreffen.

Doch mag es mit dem Gesagten sein Bewenden haben!

⁴ Die natürlich auch eine Translation, eine Grenzbewegung oder eine Schiebung sein kann.

Die kinematischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum

Von

Hans Robert Müller, Berlin

E. Kruppa zum 75. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 5. Januar 1961)

1911 behandelten unabhängig voneinander *W. Blaschke* und *J. Grünwald* eine Abbildung der Bewegungen in der Euklidischen Ebene auf die Punkte des dreidimensionalen Parameterraums, dem eine nicht-Euklidische, nämlich die sogenannte quasi-elliptische Metrik aufgeprägt ist. Diese „kinematische Abbildung in der Ebene“ wurde von *E. Kruppa* projektiv verallgemeinert. — Wesentlich für diese Abbildung ist folgendes: Die Geraden des Parameterraumes werden auf Punktepaare der Ebene so abgebildet, daß die Bildpunktepaare der Geraden eines Bündels durch jene ebene Bewegung ineinander übergeführt werden, die dem Bündelträger entspricht. Die Inzidenzbedingung eines Punktes und einer Geraden des Parameterraumes kann somit auch als Darstellung jener ebenen Bewegung gedeutet werden, durch die der „linke Bildpunkt“ der Geraden in den „rechten Bildpunkt“ übergeht [1].

Die „kinematische Abbildung auf der Kugel“ fußt einmal auf einem Ergebnis von *K. Stephanos* aus dem Jahre 1883, nämlich daß der dreidimensionale Parameterraum (Gruppenraum) der sphärischen Bewegungen, also Drehungen um einen festen Punkt eine elliptische Maßbestimmung besitzt, zum anderen auf der von *G. Fubini*, *J. Hjelm*, *S. Petersen* und *E. Study* um 1900 betrachteten Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes auf geordnete Punktepaare der Einheitskugel [2].

Unter Verwendung von Quaternionen kann man nach *L. Euler* die Drehungen um einen festen Punkt O in der Gestalt

$$x^* = \tilde{A} \cdot x \cdot A \quad (1)$$

schreiben. Hierbei wird der Punkt x mit dem Ortsvektor

$$\vec{Ox} = x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3$$

in den Punkt x^* mit

$$\vec{Ox^*} = x^* = e_1 x_1^* + e_2 x_2^* + e_3 x_3^*$$

um eine durch O gehende Drehachse der Richtung a durch den Drehwinkel 2α gedreht. Ferner ist

$$A = a_0 + e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 \quad (2)$$

eine genormte Quaternion mit

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (AA) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

und bedeutet

$$\tilde{A} = a_0 - e_1 a_1 - e_2 a_2 - e_3 a_3$$

die zu A konjugierte Quaternion. Die Regeln der Quaternionenmultiplikation ergeben sich aus

$$e_j \cdot e_j = -1 \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i = e_k$$

für zyklische Anordnungen i, j, k von 1, 2, 3.

Der Skalar- bzw. Vektorteil der Quaternion A steht in einfachem Zusammenhang mit der Drehachse a und dem Drehwinkel 2α . Es gilt

$$S(A) = a_0 = \cos \alpha,$$

$$V(A) = e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 = a \sin \alpha.$$

Der durch die Quaternion $\pm A$ bestimmten Bewegung der Kugel (Drehung um O) ordnen wir einen gleichfalls mit A bezeichneten Punkt eines projektiven Raumes von drei Dimensionen zu; in ihm werde eine elliptische Metrik auf der nullteiligen Quadrik mit der Gleichung

$$(XX) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (3)$$

begründet. Es erscheinen also nach (2) die Weierstraßschen Koordinaten a_j des Punktes A zur Quaternion A zusammengefaßt.

Für die erwähnte Geradenabbildung werden aus den Plückerschen Koordinaten g_{ij} einer Geraden G dieses elliptischen Raumes E_3 die Vektoren

$$\begin{aligned} g &= e_1 g_{01} + e_2 g_{02} + e_3 g_{03}, \\ g^* &= e_1 g_{23} + e_2 g_{31} + e_3 g_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

gebildet. Aus ihnen setzen sich die beiden „Richtungsvektoren“ r, r' von G wie folgt zusammen:

$$r = g + g^*, \quad r' = g - g^*. \quad (5)$$

Die Endpunkte dieser im Kugelmittelpunkt O angesetzten Vektoren sind dann die Bildpunkte von G . Die Plückersche Gleichung

$$(gg^*) = g_{01} g_{23} + g_{02} g_{31} + g_{03} g_{12} = 0$$

gestattet hierbei die Normierung

$$(rr') = (r' r') = 1. \quad (6)$$

Die Inzidenzbedingung des Punktes A und der Geraden G lautet nun

$$A \cdot r' - r \cdot A = 0 \quad (7)$$

und stimmt wegen (1) mit der Gleichung überein, die der Drehung des „linken Bildpunktes“ r in den „rechten Bildpunkt“ r' von G entspricht.

Auf Grund dieses Abbildungsprinzipes läßt sich die sphärische Kinematik — in algebraischer, wie differentialgeometrischer Hinsicht — in ihrem elliptischen Parameterraum E_3 verfolgen und eine Reihe von Ergebnissen und Sätzen erzielen, die denen der *Blaschke-Grünwald*-Abbildung entsprechen [3].

Aus dieser sphärischen kinematischen Abbildung gewinnen wir nun mittels des Übertragungsprinzips der Liniengeometrie von *E. Study* kinematische Abbildungen im dreidimensionalen Raum, die auf der Darstellung von Bewegungen und Umlegungen in diesem Raum mit Hilfe von dualen Quaternionen (Biquaternionen) beruhen. Wir betrachten hierzu auf der Einheitskugel neben reellen Punkten x mit reellen Koordinaten x_j auch duale (dual-komplexe) Punkte $\mathbf{x}$ mit dualen (dual-komplexen) Koordinaten

$$\mathbf{x}_j = x_j + \varepsilon \bar{x}_j.$$

Hierbei genüge die Einheit ε einer der Bedingungen

$$\varepsilon^2 = +1, \quad (8)$$

$$\varepsilon^2 = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 = -1, \quad (10)$$

je nachdem ob die Maßbestimmung unseres dreidimensionalen Raumes R_3 elliptisch, parabolisch, d. h. Euklidisch oder hyperbolisch ist. Die so gebildeten dualen Zahlen bilden im Fall (8) und (9) einen Ring, für den Zahlen der Gestalt $a(1 \pm \varepsilon)$ bzw. rein duale Zahlen als Nullteiler fungieren. Im Fall (10) hingegen haben wir es mit den üblichen

komplexen Zahlen zu tun. — Solche duale Punkte der Einheitskugel werden durch duale Einheitsvektoren

$$\mathbf{x} = x + \varepsilon \bar{x} \quad (11)$$

mit

$$\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}\mathbf{x}) = (xx) + \varepsilon^2(\bar{x}\bar{x}) + 2\varepsilon(x\bar{x}) = 1$$

oder

$$(xx) + \varepsilon^2(\bar{x}\bar{x}) = 1, \quad (x\bar{x}) = 0 \quad (12)$$

dargestellt. Diese Bedingungen gestatten nun die Deutung der x_j und $\bar{x}_j$ als genormte Plückersche Koordinaten einer Geraden des R_3 . Hierbei stellt die erste Gleichung (12) eine Normierungsbedingung, die zweite Beziehung die Plückersche Gleichung dar. Es läßt sich daher dem dualen Punkt $\mathbf{x}$ der Einheitskugel und somit auch dem dualen Einheitsvektor (11) umkehrbar eindeutig eine reelle Gerade des dreidimensionalen Raumes R_3 derart zuordnen, daß die dualen Drehungen der Einheitskugel den reellen Bewegungen des R_3 , aufgefaßt als Geradenraum, entsprechen. Eine Bewegung im dreidimensionalen Raum kann somit in der Form (1), also durch

$$\mathbf{x}^* = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (13)$$

erfaßt werden. Hierbei ist

$$\mathbf{A} = A + \varepsilon \bar{A}$$

eine elliptische, parabolische oder hyperbolische duale Quaternion (Biquaternion), je nachdem ob (8), (9) oder (10) gilt. Die Normierungsbedingung

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}) = 1$$

führt zu

$$(AA) + \varepsilon^2(\bar{A}\bar{A}) = 1, \quad (A\bar{A}) = 0. \quad (14)$$

Um unsere Bewegung auf Punkte und Ebenen des R_3 anwenden zu können, bilden wir aus den homogenen Koordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 eines Punktes Y bzw. aus den homogenen Koordinaten u_0, u_1, u_2, u_3 einer Ebene U des R_3 die dualen Quaternionen

$$\mathbf{Y} = y_0 + \varepsilon(e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3), \quad (15)$$

$$\mathbf{U} = \varepsilon u_0 + e_1 u_1 + e_2 u_2 + e_3 u_3. \quad (16)$$

Dann läßt sich die Bewegung (13) auch in der Form

$$\mathbf{Y}^* = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}_\varepsilon \quad (16)$$

$$\mathbf{U}^* = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_\varepsilon \quad (17)$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A} - \varepsilon \bar{\mathbf{A}}$$

gesetzt wurde [4].

Aus dieser Fortsetzung der sphärischen Kinematik vom reellen ins dual-komplexe Gebiet ergibt sich nun eine analoge Fortsetzung und Erweiterung des elliptischen Parameterraums, die wir je nach dem Wert von ε^2 als elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch bezeichnen wollen. Einer Bewegung im R_3 entspricht somit ein dualer Punkt $\mathbf{A}$ dieses elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch erweiterten elliptischen Raumes $\mathbf{E}_3$, der daher als Modell des 6-dimensionalen Parameterraumes der Bewegungsgruppe im R_3 dient. Wie früher fassen wir nun im elliptischen Raum $\mathbf{E}_3$ die gerichteten Geraden als Raumelemente auf und bilden sie nach *Fubini*, *Hjelmslev-Petersen* und *Study* auf geordnete Punktpaare der Einheitskugel ab. Gemäß (4), (5) und (6) erhalten wir als Bild einer dualen Geraden $\mathbf{G}$ des erweiterten elliptischen Raumes $\mathbf{E}_3$ ein duales Punktpaar (Paar von Richtungsvektoren) $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ auf der Einheitskugel und folglich nach dem *Study*schen Übertragungsprinzip zwei reelle Bildgerade $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ im R_3 . Hierbei sind die dualen Plückerschen Koordinaten $\mathbf{g}_{ij}$ von $\mathbf{G}$ zu Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= e_1 \mathbf{g}_{01} + e_2 \mathbf{g}_{02} + e_3 \mathbf{g}_{03}, \\ \mathbf{g}^* &= e_1 \mathbf{g}_{23} + e_2 \mathbf{g}_{31} + e_3 \mathbf{g}_{12}\end{aligned}\quad (18)$$

zusammengefaßt und gelten neben

$$(\mathbf{g} \mathbf{g}^*) = 0$$

für

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{g}^*, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{g} - \mathbf{g}^* \quad (19)$$

die Normierungsbedingungen

$$(\mathbf{r} \mathbf{r}) = (\mathbf{r}' \mathbf{r}') = 1. \quad (20)$$

Dieser Übergang von der dualen Geraden $\mathbf{G}$ des $\mathbf{E}_3$ zu den beiden reellen Geraden $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ ist nun eine kinematische Abbildung im dreidimensionalen Raum R_3 , denn einem dualen Punkt $\mathbf{A}$ von $\mathbf{E}_3$, aufgefaßt als Träger aller inzidenten dualen Geraden $\mathbf{G}$, entspricht eine Bewegung im R_3 , die die „linke Bildgerade“ $\mathbf{r}$ in die „rechte Bildgerade“ $\mathbf{r}'$ überführt. Dies folgt sofort aus der Übereinstimmung der Inzidenzbedingung von Punkt und Gerade im elliptischen Raum, nämlich

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (21)$$

mit der Formel (13) für die Bewegung der Geraden $\mathbf{x} = \mathbf{r} = r + \varepsilon \bar{r}$ in die Gerade $\mathbf{x}^* = \mathbf{r}' = r' + \varepsilon \bar{r}'$ im R_3 .

Betrachten wir nun Gebilde dieses ins Duale erweiterten elliptischen Raumes $\mathbf{E}_3$, die aus Geraden oder Punkten bestehen und von alge-

braischer oder analytischer Natur sein mögen, so gelangen wir zu einer Fülle von Ergebnissen und Sätzen, die vielfach Gegenstücke in der klassischen kinematischen Abbildung von *Blaschke* und *Grünwald* besitzen. Vgl. für den Fall der parabolischen Erweiterung [5]!

Um nun den Zusammenhang zwischen dieser kinematischen Abbildung im Raume R_3 und der von *Blaschke* und *Grünwald* betrachteten kinematischen Abbildung in der Euklidischen Ebene aufzuzeigen, gehen wir den Umweg über die Abbildung der Bewegungen im R_3 auf die Punkte einer quadratischen Mannigfaltigkeit M_6^2 von 6 Dimensionen in einem 7-dimensionalen linearen Raum P_7 . Hierzu deuten wir mit *E. Study* [6] die Koordinaten $x_0, x_1, x_2, x_3, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ einer dualen Quaternion $\mathbf{X} = X + \varepsilon \bar{X}$ als homogene Punktkoordinaten in einem projektiven Raum P_7 . Wir lassen im Augenblick die Normierungsbedingungen unberücksichtigt; dann wird gemäß (14) in P_7 durch die Gleichung

$$(X\bar{X}) = x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 = 0 \quad (22)$$

eine Mannigfaltigkeit M_6^2 als Ort der Bildpunkte von Bewegungen (Somen) des R_3 ausgezeichnet.

Für das Folgende ist nur der Euklidische Fall von Interesse, es gelte also stets (9). Wie man nun leicht bestätigt, entspricht einer Quaternion der Gestalt

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} = a_0 + a_1 e_1 + \varepsilon(\bar{a}_2 e_2 + \bar{a}_3 e_3) \quad (23)$$

im R_3 eine Drehung um eine Achse der Richtung e_1 , durch die im besonderen die Ebene R_2 mit der Gleichung $x_1 = 0$ in sich bewegt wird. Setzt man nämlich

$$\mathbf{Y} = y_0 + \varepsilon(e_2 y_2 + e_3 y_3)$$

in (16) ein und beachtet (23), so erhält man ein $\mathbf{Y}^*$ gleicher Gestalt.

Die Bildpunkte der Drehungen (23) genügen nun den Gleichungen

$$x_2 = x_3 = \bar{x}_0 = \bar{x}_1 = 0 \quad (24)$$

und erfüllen somit einen linearen Raum P_3 , der ganz auf der M_6^2 liegt, wie (22) sofort erkennen läßt.

Zu zwei Punkten $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ dieses P_3 , denen im $\mathbf{E}_3$ zwei bezüglich der absoluten Quadrik (3) konjugierte duale Punkte entsprechen, gehören duale Quaternionen vom Typus (23) mit

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}}) = a_0 b_0 + a_1 b_1 = 0.$$

Durch die Punkte $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ist nun eine duale Gerade $\mathbf{G}$ des $\mathbf{E}_3$ bestimmt: Für ihre Richtungsvektoren finden wir

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = g_{01} e_1 + \varepsilon(g_{02} + g_{31}) e_2 + \varepsilon(g_{03} + g_{12}) e_3, \\ \mathbf{r}' &= \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} = g_{01} e_1 + \varepsilon(g_{02} - g_{31}) e_2 + \varepsilon(g_{03} - g_{12}) e_3, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

wobei

$$\begin{aligned} G_{01} &= g_{01} = a_0 b_1 - a_1 b_0, & G_{23} &= \varepsilon^2 g_{23} = 0, \\ G_{02} &= \varepsilon g_{02} = \varepsilon(a_0 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 b_0), & G_{31} &= \varepsilon g_{31} = \varepsilon(\bar{a}_3 b_1 - a_1 \bar{b}_3), \\ G_{03} &= \varepsilon g_{03} = \varepsilon(a_0 \bar{b}_3 - \bar{a}_3 b_0), & G_{12} &= \varepsilon g_{12} = \varepsilon(a_1 \bar{b}_2 - \bar{a}_2 b_1) \end{aligned}$$

die Plückerschen Geradenkoordinaten von $\mathbf{G}$ in $\mathbf{E}_3$ sind. Die g_{ij} legen also die (reelle) Verbindungsgerade g von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ im P_3 fest. Hierbei kann noch $g_{01} = 1$ gewählt werden, womit auch der Normierungsbedingung (20) Rechnung getragen ist.

Den Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ von (25) werden nun in der Abbildung von *Blaschke-Grünwald* unmittelbar die Bildpunkte der Geraden g zugeordnet, so daß durch (21) die Bewegung in der Ebene dieser Bildpunkte beschrieben wird. Vgl. hierzu [7]. Damit ist der Zusammenhang zwischen der klassischen kinematischen Abbildung in der Ebene und unserer Abbildung im Raum hergestellt.

Literatur

- [1] *W. Blaschke*, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math. Phys. **60** (1911), 61–91, 203–204.
J. Grünwald, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sitz.-Ber. Akad. Wien, Math. naturw. Kl. **80**, Abt. II (1911), 677–741.
E. Kruppa, (*E. Müller-E. Kruppa*) Vorl. über Darstellende Geometrie I, Leipzig u. Wien 1923.
- [2] *C. Stéphanos*, Math. Ann. **22** (1883), 299–367, 589–592.
W. Blaschke, Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamb. Math. Einzelschr. **34**, Heft, 1942.
- [3] *H. R. Müller*, Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel. Monatsh. f. Math. **55** (1950), 28–42.
W. Blaschke, Kinematik und Quaternionen, Berlin (im Erscheinen).
- [4] Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften III. 1/2 (Artikel von H. Rothe).
- [5] *H. R. Müller*, Sulla proiezione cinematica nello spazio Euclideo. Atti del IV. Congr. Unione Mat. Ital. 1951.
H. R. Müller, Zur kinematischen Abbildung flächenläufiger Bewegungsvorgänge im Euklidischen Raum. Archiv d. Math. **11** (1960), 383–391.
H. R. Müller, Über eine bemerkenswerte Klasse flächenläufiger Bewegungsvorgänge im Euklidischen Raum. Journ. de Math. pures et appl. 1960 (im Erscheinen).
- [6] *E. Study*, Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903.
E. Study, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitz.-Ber. der Berliner Mathem. Gesellsch. 1912.
E. A. Weiß, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. Leipzig und Berlin 1935.
- [7] *W. Blaschke-H. R. Müller*, Ebene Kinematik. München 1956 (Teil IV).

Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffelklammern zweiter Art

Von

M. Pinl, Köln

Erwin Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 15. Juni 1960)

Im Riemannschen Raum gilt der Satz: der metrische Zusammenhang $g_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_n)$ bestimmt eindeutig den affinen Zusammenhang $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$. Dabei wird der metrische Zusammenhang regulär vorausgesetzt: $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$. Dann gilt für die Christoffelklammern erster Art $[\varrho, \alpha \beta] = [\varrho, \beta \alpha]$:

$$[\varrho, \alpha \beta] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\varrho}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\varrho}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} \right), \quad \alpha, \beta, \varrho = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

und umgekehrt

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} = [\alpha, \beta \varrho] + [\beta, \alpha \varrho], \quad \alpha, \beta, \varrho = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Aus (1) entstehen durch Überschieben mit den kontravarianten Komponenten $g^{\lambda\varrho}$ der Riemannschen Maßbestimmung $g_{\alpha\beta}$ die Definitionsgleichungen für die Christoffelklammern zweiter Art $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta\alpha \end{smallmatrix} \right\}$:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = g^{\lambda\varrho} [\varrho, \alpha \beta] = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta\alpha \end{smallmatrix} \right\}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Umgekehrt sind wiederum die Christoffelklammern erster Art Linearkombinationen der Christoffelklammern zweiter Art:

$$[\varrho, \alpha \beta] = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} g_{\lambda\varrho}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

¹ Es gilt $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta = \left\{ \begin{smallmatrix} 1, \alpha \\ 0, \alpha + \beta \end{smallmatrix} \right\}$. Über doppelt vorkommende Indizes eines und desselben Terms ist nach den Regeln des Tensorkalküls zu summieren.

Mit konstanten $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$ erhält man für die Komponenten $R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}$ des gemischten Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors die Werte

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_{\gamma}} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\beta \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \rho\gamma \end{smallmatrix} \right\} = 0, \\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \rho = 1, 2, \dots, n.$$

Mit konstanten nicht insgesamt verschwindenden $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = c_{\alpha\beta}^{\lambda}$ erhält man für die Komponenten $R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}$ zunächst die Werte

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = c_{\alpha\gamma}^{\rho} c_{\rho\beta}^{\lambda} - c_{\alpha\beta}^{\rho} c_{\rho\gamma}^{\lambda}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Ebenso gilt, wenn $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ die Komponenten einer beliebigen linearen Übertragung bezeichnen, für den zugehörigen Krümmungstensor $K_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}$:

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = C_{\alpha\gamma}^{\rho} C_{\rho\beta}^{\lambda} - C_{\alpha\beta}^{\rho} C_{\rho\gamma}^{\lambda}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \rho = 1, 2, \dots, n,$$

wofern man von konstanten Komponenten $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = C_{\alpha\beta}^{\lambda}$ ausgeht. Da die Wahl der Konstanten $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = C_{\alpha\beta}^{\lambda}$ freisteht, kann man offensichtlich erreichen, daß nicht alle Krümmungskomponenten $K_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda}$ verschwinden. Lineare Übertragungen mit konstanten verschwindenden Komponenten $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = 0$ und solche mit konstanten nicht insgesamt verschwindenden Komponenten $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = C_{\alpha\beta}^{\lambda}$ führen also im allgemeinen auf geometrisch verschiedene Raumklassen.

Anders im Falle einer durch die Christoffelklammern (1), (3) gegebenen Riemannschen Übertragung, deren Komponenten durch Differentiation aus dem metrischen Feld der $g_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_n)$ entspringen und somit nicht völlig frei gewählt werden können. Aus (4) und (2) folgt zunächst:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}} = g_{\lambda\alpha} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta\rho \end{smallmatrix} \right\} + g_{\lambda\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\rho \end{smallmatrix} \right\}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \rho = 1, 2, \dots, n$$

und daher für konstante $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \beta\rho \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\rho \end{smallmatrix} \right\}$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}} = c_{\beta\rho}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} + c_{\alpha\rho}^{\lambda} g_{\lambda\beta}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Für das partielle Differentialsystem erster Ordnung (6) bestehen die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho} \partial x_{\sigma}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\rho}}, \quad \alpha, \beta, \rho, \sigma = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

und die beliebig vorgeschriebenen Anfangsbedingungen

$$g_{\alpha\beta}(x_1, \dots, x_n) |_{x_1=x_1^0, \dots, x_n=x_n^0} = g_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Aus den Integrabilitätsbedingungen (7) folgt mit Rücksicht auf (6)

$$\begin{aligned} g_{\mu\alpha}(c_{\beta\varrho}^\lambda c_{\lambda\sigma}^\mu - c_{\beta\sigma}^\lambda c_{\lambda\varrho}^\mu) + g_{\lambda\mu}(c_{\beta\varrho}^\lambda c_{\alpha\sigma}^\mu + c_{\alpha\varrho}^\lambda c_{\beta\sigma}^\mu) + \\ g_{\mu\beta}(c_{\alpha\varrho}^\lambda c_{\lambda\sigma}^\mu - c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\lambda\varrho}^\mu) - g_{\lambda\mu}(c_{\beta\sigma}^\lambda c_{\alpha\varrho}^\mu + c_{\alpha\sigma}^\lambda c_{\beta\varrho}^\mu) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2, \dots, n.$$

Da $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$, reduzieren sich die linken Seiten der Gleichungen (9) auf den ersten und dritten Term. Sodann gilt (5) und (8), also

$$g_{\mu\alpha}^{(0)} R_{\beta\sigma\varrho}^\mu + g_{\mu\beta}^{(0)} R_{\alpha\sigma\varrho}^\mu = 0, \quad \alpha, \beta, \mu, \varrho, \sigma = 1, 2, \dots, n$$

und daher notwendig

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\lambda = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, \dots, n,$$

da die $g_{\mu\alpha}^{(0)}$ und $g_{\mu\beta}^{(0)}$ beliebig vorgeschrieben werden können. Die Annahme nicht insgesamt verschwindender konstanter Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = c_{\alpha\beta}^\lambda$ führt also auf denselben Krümmungstensor wie die Annahme verschwindender Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$.

(I) *Ein Riemannscher Raum mit konstanten Christoffelklammern zweiter Art ist stets ein euklidischer Raum.*

Liegt umgekehrt ein euklidischer Raum vor, so gilt in diesem in geeigneten Koordinaten $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$. Geht man von solchen verschwindenden Christoffelklammern aus, so reduzieren sich die für die Christoffelklammern zweiter Art geltenden Transformationsgleichungen auf das System

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta} = \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}, \quad \alpha, \beta, i, s = 1, 2, \dots, n$$

oder

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta} = \overline{c_{\alpha\beta}^s} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_s}, \quad \alpha, \beta, i, s = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

wenn wir in den neuen Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ konstante nicht insgesamt verschwindende Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = \overline{c_{\alpha\beta}^s}$ verlangen.

Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\gamma} = \frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\gamma \partial \bar{x}_\beta}, \quad i, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n$$

des Systems (10) sind erfüllt, da der bei ihrer Berechnung entstehende Krümmungstensor (des euklidischen Raumes) sowohl für $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = 0$ wie

auch für $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ ik \end{smallmatrix} \right\} = \overline{c}_{ik}^s$ identisch verschwindet. Daher gilt auch umgekehrt:

(II) *In jedem euklidischen Raum kann man konstante Christoffelklammern zweiter Art einführen.*

Als Beispiel betrachten wir einen Riemannschen Raum mit der nichtkonstanten Maßbestimmung

$$g_{\alpha\alpha} = e^{2x_\alpha}, g_{\alpha\beta} = 0, g = e^{2(x_1 + \dots + x_n)}, g^{\alpha\alpha} = e^{-2x_\alpha}, g^{\alpha\beta} = 0; \\ \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \alpha \neq \beta. \quad (11)$$

Zur Maßbestimmung (11) gehören die konstanten nicht insgesamt verschwindenden Christoffelklammern zweiter Art

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha\alpha \end{smallmatrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} = 0, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n; \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma.$$

Transformieren wir gemäß

$$x_\alpha = \lg(\bar{x}_\alpha + 1), \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \frac{1}{(\bar{x}_1 + 1) \dots (\bar{x}_n + 1)} \neq 0, \\ \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

so entsteht aus (11) die konstante Metrik

$$\bar{g}_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Der Riemannsche Raum mit der Metrik (11) ist also ein euklidischer Raum.

Als Gegenbeispiel betrachten wir einen drei- oder mehrdimensionalen Riemannschen Raum mit der konstanten jedoch nicht verschwindenden Riemannschen Krümmung K_0 . Nach einem Satz von F. Schur² gilt in diesem Fall

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\lambda = (\delta_\beta^\lambda g_{\alpha\gamma} - \delta_\gamma^\lambda g_{\alpha\beta}) K_0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, \dots, n$$

und nach Verjüngung über $\lambda = \gamma$

$$R_{\alpha\beta} = (1 - n) g_{\alpha\beta} K, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

Mit $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} = c_{\alpha\beta}^\lambda$ sind $R_{\alpha\beta\gamma}^\lambda$ und $R_{\alpha\beta}$ konstant. Da auch $K_0 \neq 0$ nach

² Vgl. z. B. L. Pf. Eisenhart, Riemannian Geometry, Chapter II, § 26; Princeton University Press 1949.

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} = c_{rs}^i, \quad i, r, s = 1, 2, \dots, m$$

und verschwindenden Christoffelklammern

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = 0, \quad (\text{mindestens einer der Indizes } \alpha, \beta, \lambda > m)$$

ist stets ein $(n - m)$ -fach singulärer euklidischer Raum⁴.

Fügen wir noch ein Ergebnis über Christoffelsche Klammern erster Art an! Nach (1) und (2) gilt:

(IV) Die Christoffelklammern erster Art eines Riemannschen Raumes lassen sich genau dann auf konstante nicht insgesamt verschwindende Werte transformieren, wenn bei dieser Transformation die metrischen Komponenten $g_{\alpha\beta}$ in lineare und (nicht insgesamt) konstante Funktionen übergehen.

Im Gegensatz zum Verhalten von Riemannschen Räumen mit konstanten Christoffelklammern zweiter Art sind Riemannsche Räume mit konstanten Christoffelklammern erster Art im allgemeinen keine euklidischen Räume. Dies zeigt etwa das Beispiel:

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = x_1, \quad g = x_1 x_2, \quad g^{11} = x_2^{-1}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = x_1^{-1}, \\ [1, 11] &= 0, \quad [1, 12] = \frac{1}{2}, \quad [1, 22] = -\frac{1}{2}, \quad [2, 11] = -\frac{1}{2}, \quad [2, 12] = \frac{1}{2}, \quad [2, 22] = 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2x_2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2x_2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2x_1}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2x_1}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} - \\ &- \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4x_1x_2} \neq 0. \end{aligned}$$

⁴ Vgl. M. Pinl, Die Hauptgruppen singulärer konform-euklidischer Räume, Journal für reine und angewandte Mathematik 203/1/2 (1960), 40—46.

Ein Beitrag zur konstruktiven Differentialgeometrie

Von

H. Schaal, Stuttgart

Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. E. Kruppa zu seinem 75. Geburtstag
in Verehrung gewidmet

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 23. Dezember 1960)

In einem elliptischen oder hyperbolischen Punkt P einer Fläche Φ seien R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien und t_1, t_2 die zugehörigen Krümmungstangenten. Die Flächentangente t in P bilde mit t_1, t_2 die orientierten Winkel $\varphi_1 = \sphericalangle(t_1, t)$ bzw. $\varphi_2 = \sphericalangle(t, t_2)$ mit $\varphi_1 + \varphi_2 = \sphericalangle(t_1, t_2) = \pi/2$. Ist R der Krümmungsradius des durch das Linien-element (P, t) bestimmten Normalschnittes von Φ , so gilt nach *L. Euler* (1760)

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{R_2}. \quad (1)$$

Der scheinbare Umriß von Φ für Normalprojektion in Richtung t habe im Bildpunkt von P den Krümmungsradius $\bar{R}$; dann gilt nach *A. Mannheim* ([1, S. 309], vgl. auch [2, S. 118]):

$$\bar{R} = R_1 \sin^2 \varphi_1 + R_2 \sin^2 \varphi_2. \quad (2)$$

(2) kann als „*duales Gegenstück*“ zu (1) angesehen werden.

Eine wichtige Aufgabe der *konstruktiven Differentialgeometrie* ist die zeichnerische Ermittlung der Größen R und $\bar{R}$, und diese ist in einfacher Weise möglich, wenn R_1, R_2 bzw. die Halbachsen $\sqrt{|R_1|}, \sqrt{|R_2|}$ der *Dupinschen* Indikatrix i von Φ in P bekannt sind [3, S. 112], [4]. Häufig können jedoch zwei (nicht normale) konjugierte Halbmesser von i rasch gefunden werden, wie z. B. bei Schiebflächen, Schraubflächen, Spiralfächen u. a. Daher ist es vom zeichnerischen Standpunkt aus wünschenswert, eine Konstruktion von R und $\bar{R}$ zu kennen, die eine *Hauptachsenkonstruktion* von i erübrigt.

Der Verfasser hat hierzu eine *Verallgemeinerung der Mannheimschen Formel* (2) hergeleitet [4], nach der sich $\bar{R}$ aus einem beliebigen Paar konjugierter Halbmesser von i ohne *Hauptachsenkonstruktion* ergibt. Sind t_1, t_2 zwei (nicht zusammenfallende) konjugierte Tangenten von Φ in P , φ_1, φ_2 ihre orientierten Winkel mit der Flächentangente t (mit $0 < \varphi_1 + \varphi_2 = \sphericalangle(t_1, t_2) \leq \pi/2$) und R_1^*, R_2^* die Krümmungsradien der Normalschnitte von Φ durch die Linienelemente $(P, t_1), (P, t_2)$, so gilt nach [4]

$$\bar{R} = R_1^* \sin^2 \varphi_1 + R_2^* \sin^2 \varphi_2. \quad (3)$$

Speziell für $t_1 \perp t_2$ ist $R_1^* = R_1, R_2^* = R_2$, und (3) geht in (2) über. Eine einfache konstruktive Auswertung von (3) wurde in [4] angegeben.

Es liegt nun nahe, im gleichen Sinn eine *Verallgemeinerung der Eulerschen Formel* (1) zu suchen. Wählt man t_1, t_2 als Achsen eines *schiefwinkligen Parallelkoordinatensystems* (x, y) , so hat i die Gleichung

$$\left| \frac{x^2}{R_1^*} + \frac{y^2}{R_2^*} \right| = 1. \quad (4)$$

Ist $Q(x, y)$ der in der Halbebene $y \geq 0$ liegende Schnittpunkt von i und t , so gilt (Abb. 1) mit $PQ = \sqrt{|R|}$

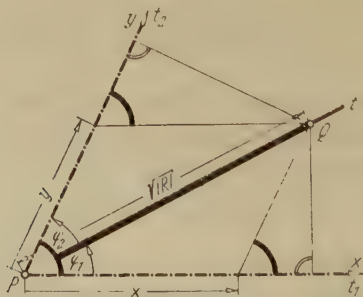


Abb. 1. Zur Verallgemeinerung der Formel von L. Euler für einen elliptischen oder hyperbolischen Flächenpunkt

$$x = \frac{\sqrt{|R|} \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad y = \frac{\sqrt{|R|} \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (5)$$

Mit (5) erhält man aus (4) (nach der üblichen Festsetzung des Vorzeichens von R) als gesuchte Verallgemeinerung von (1):

$$\frac{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{R} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{R_1^*} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{R_2^*}. \quad (6)$$

Speziell für $t_1 \perp t_2$ ist $R_1^* = R_1$, $R_2^* = R_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$, und (6) geht in (1) über.

Aus (6) und (3) ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen R und $\bar{R}$. Man erhält zunächst

$$R\bar{R} = R_1^* R_2^* \sin^2(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (7)$$

Ist nun speziell $R_1^* = R_1$, $R_2^* = R_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$, so folgt unter Verwendung der Beziehung $K = 1 : R_1 R_2$ für die *Gaußsche Krümmung* K von Φ in P

$$K = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\bar{R}}, \quad (8)$$

d. h. die *Gaußsche Krümmung* K von Φ in P ist gleich dem Produkt der Krümmung $1 : R$ des Normalschnittes von Φ durch das Linienelement (P, t) und der Krümmung $1 : \bar{R}$ des scheinbaren Umrisses von Φ im Bildpunkt von P bei Normalprojektion in Richtung t .¹

Der Krümmungsradius R kann nach (6) in einfacher Weise konstruiert werden (Abb. 2): Auf t seien die orientierten Strecken $PA_1 = R_1^*$,

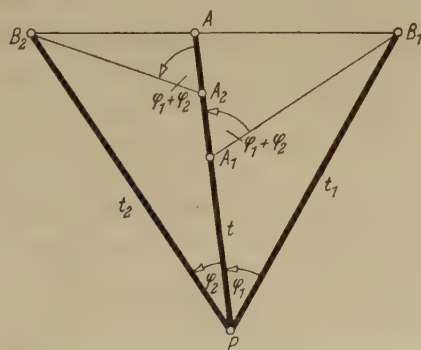


Abb. 2. Konstruktion des Krümmungsradius eines Flächennormalschnittes

$PA_2 = R_2^*$ abgetragen, auf t_1, t_2 die Punkte B_1, B_2 durch die orientierten Winkel $\sphericalangle(A_1 B_1, t) = \sphericalangle(t, A_2 B_2) = \varphi_1 + \varphi_2$ festgelegt. Ist A der

¹ Nach brieflicher Mitteilung hat *F. Löbell* diese Beziehung ebenfalls gefunden. Sie ist außerdem — wie mir *F. Löbell* später noch mitteilte — in [5, S. 224] als „Satz von d'Ocagne“ angegeben; vgl. [6, S. 189].

Schnittpunkt von $B_1 B_2$ und t , so ist PA bereits der gesuchte Krümmungsradius R .

Zum Nachweis verwenden wir die in Abb. 2 auftretenden Dreiecksflächen

$$2 \Delta PB_1 B_2 = PB_1 \cdot PB_2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$2 \Delta PB_1 A = PB_1 \cdot PA \cdot \sin \varphi_1, \quad 2 \Delta PAB_2 = PA \cdot PB_2 \cdot \sin \varphi_2, \quad (9)$$

wobei nach dem Sinussatz gilt:

$$PB_1 = R_1^* \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin \varphi_2}, \quad PB_2 = R_2^* \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin \varphi_1}. \quad (10)$$

Nach Abb. 2 ist nun

$$\Delta PB_1 B_2 = \Delta P B_1 A + \Delta P A B_2, \quad (11)$$

und damit

$$\frac{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{PA} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{R_1^*} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{R_2^*}. \quad (12)$$

Aus (6) und (12) liest man — wie behauptet — $PA = R$ ab. Im Sonderfall $R_1^* = R_1$, $R_2^* = R_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$ entsteht aus Abb. 2 die bei E. Kruppa [3, S. 112] angegebene Konstruktion zur Formel von L. Euler.



Abb. 3. Dupinsche Indikatrix eines parabolischen Flächenpunktes

Im Fall eines parabolischen Flächenpunktes P schließlich ist von den konjugierten Tangenten t_1, t_2 stets eine (etwa t_2) Schmieltangente. Dann ist $R_2 = R_2^* = \infty$, und die Dupinsche Indikatrix i besteht aus einem Parallelenpaar mit der Mittellinie t_2 (Abb. 3). Mit $PQ_1 = \sqrt{|R_1^*|}$, $PQ = \sqrt{|R|}$

folgt aus dem Sinussatz

$$\frac{\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{R} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{R_1^*}. \quad (13)$$

Demnach gilt (6) auch im parabolischen Fall ($R_2 = R_2^* = \infty$), ebenso die Konstruktion von R nach Abb. 2, bei der jetzt $B_1 A \parallel t_2$ ist. Anstelle der Gleichung (2) von A. Mannheim bzw. ihrer Verallgemeinerung (3) ergibt sich im parabolischen Fall unabhängig von φ_1 und R_1^* für $\varphi_2 \neq 0$ stets $\bar{R} = \infty$ (vgl. [4]).

Literatur

- [1] *Mannheim, A.*: Cours de géométrie descriptive, Paris 1880.
- [2] *Blaschke, W.*: Kreis und Kugel, Leipzig 1916.
- [3] *Kruppa, E.*: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
- [4] *Schaal, H.*: Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion. Sitzb. bayer. Akad. Wiss. 1960 (Math. Nat. Kl. S. 277—310).
- [5] *Cesàro, E.*: Vorlesungen über natürliche Geometrie, Berlin 1926.
- [6] *D'Ocagne M.*: Cours de géométrie I, Paris 1917.

On Axioms of Congruence Due to H. G. Forder

By

Paul Szász, Budapest (Hungary)

To Professor Erwin Kruppa on the occasion of his 75th birthday.

(Received July 15, 1960)

Following the older works of *J. Møllerup* [1], *R. L. Moore* [2] and *J. L. Dorroh* [3], [4], a considerable time later *H. G. Forder* [5] set up by assuming the axioms of order and their consequences a further reduced system of congruence axioms in which, again, the only undefined congruence notion is that of the congruence of ordered point-pairs. Writing $PQ = XY$ to mean that the point-pair P, Q is congruent to the point-pair X, Y , this system of congruence axioms is the following:

I. If A, B are given distinct points, then on any ray OC there is just one point D such that $AB = OD$.

II. If $AB = CD$ and $CD = EF$, so is $AB = EF$.

III. If B is between A and C , and B' between A' and C' and if $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, then $AC = A'C'$.

IV. $AB = BA$.

V₁. For triangles ABC and ABC' with $AC = AC'$ and $BC = BC'$,

1.1 if X is on the line AB , then $XC = XC'$,

1.2 if Y, Y' are on the rays BC, BC' (or their opposites) respectively, and if $BY = BY'$, then $AY = AY'$.

V₂. For triangles ABC and BAC' with $AC = BC'$, $BC = AC'$,

2.1 if X, X' are on the rays AB, BA (or their opposites) respectively, and if $AX = BX'$, then $CX = C'X'$,

2.2 if Y, Y' are on the rays BC, AC' (or their opposites) respectively, and if $BY = AY'$, then $AY = BY'$.

Disregarding some logical refinements, the Axioms I—IV are the old ones, while Axioms V₁ and V₂ are due to *H. G. Forder* as the two

parts of a new form of the old Axiom V. *R. L. Moor* and *J. L. Dorroh* declared their last Axiom V for two arbitrary triangles ABC and $A'B'C'$ with $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$, requiring that if D is a point on CA produced and D' a point on $C'A'$ produced, and if $CD = C'D'$, then $BD = B'D'$.

It was shown by *H. G. Forder* l. c. that this latter axiom could be replaced indeed by his Axioms V_1 and V_2 . The treatment by him relates to the plane, but he remarked also that the extension to space follows the usual lines, referring to *Dorroh's* second paper [4]. However, in point 21 of his quoted work, evidently due to some absent-mindedness, not the stated theorem is proved, which is later needed, but its reverse. Nevertheless the required proof is not difficult to be made.

In the present paper we give an other treatment for the plane which is perhaps simpler than that of *H. G. Forder*.

*

We need two lemmas of *H. G. Forder*¹ which we prove here for the sake of completeness.

Lemma 1. A triad of non-collinear points cannot be congruent to a triad of collinear points.

For the proof it is evidently enough to show the following:

If ABC is a triangle and C' between A and B , we cannot have $AC = AC'$, $BC = BC'$.

For this take the point X on the interval CC' so that CX is not congruent to $C'X$; let X' be also on CC' with $CX = C'X'$, then $X \neq X'$. If $AC = AC'$, then in the triangles ACC' and $AC'C$ we have (Axiom $V_{2.1}$) $AX = AX'$. If $BC = BC'$, then similarly $BX = BX'$. Therefore from the triangles ABX , ABX' we get (Axiom $V_{1.1}$) $C'X = C'X'$ that contradicts Axiom I.

Lemma 2. Suppose, in the figure of Axiom V_2 , that C and C' are on the same side of AB and that the side BC of ABC cuts the side AC' of BAC' in X . Then $AX = BX$, $CX = C'X$.

For if we take X' on the side BC with $CX' = C'X$, then $BX' = AX$ and from the triangles ABC and BAC' we have (Axiom $V_{2.2}$) $BX = AX'$ while from $CC'A$ and $C'CB$ we get (Axiom $V_{2.2}$ again) $CX = C'X'$. Hence the triads B, X, C and A, X', C' are congruent, which, by Lemma 1,

¹ See [5], points 6, 16.

is impossible unless A, X', C' are collinear, and hence $X' = X$ i. d. $CX = C'X$ and consequently $AX = BX$.

Definition 1. The lines l, m cut each other in O . We say m is *perpendicular* to l if the following holds: if on the line l the point O is between A and B with $OA = OB$ then for an arbitrary point P on m we have $AP = BP$.

If this is true by a special choice of the points A, B and $P \neq O$ then it holds in every case in the sense of Axiom V_1 . We write in symbol $m \perp l$ as usual.

Theorem 1. If $m \perp l$, then $l \perp m$.

For let on the line l the common point O of l and m be between A and B while on m this point O between P and Q , with $OA = OB = OP = OQ$. Then from the triangles PBO and BPO we have (Axiom $V_{2.2}$) $AP = QB$. But, since $m \perp l$, also (Definition 1) $AP = PB$ holds. Consequently $PB = QB$. Since still by construction $OP = OQ$, by definition $l \perp m$.

Theorem 2. If ABC is a triangle with $AC = BC$, then the side AB has a mid-point.

For the proof take on the rays CA, CB the points P, Q respectively, different from A, B, C with $CP = CQ$. Then $AP = BQ$ and from the triangles ABC and BAC we have (Axiom $V_{2.2}$) $BP = AQ$. Since the intervals BP, AQ have a point S in common, by Lemma 2 applied to the triangles ABP, BAQ we get $AS = BS$. The line CS cuts the side AB in M say. By Axiom $V_{1.1}$ applied to the triangles CSA, CSB we have $AM = BM$ i. d. the side AB has M as mid-point.

Corollar. If ABC is a triangle with $AC = BC$ then for the mid-point M of AB (which exists as just proved) we have $CM \perp AB$. (By Definition 1.)

Theorem 3. Given any line l , there is a line perpendicular to it.

For let AC be an arbitrary interval on l and draw an interval $CB = CA$ lying not on l . If $AB \neq CB$, take B' on the ray AC so that $AB' = AB$, and C' on the ray AB so that $AC' = AC^2$. Then $BC' = B'C$ and from the triangles ACC' and $AC'C$ we have (Axiom $V_{2.2}$) $BC = B'C'$. But by construction $AC = BC$, therefore $AC = B'C'$ and so, since by construction also $AC' = AC$, we get $AC' = B'C'$. Now, for the mid-point M of the interval AB' holds $C'M \perp l$ (Corollar of Theorem 2). In the case $AB = BC$ the statement follows immediately from the same corollar.

² For this construction c. f. *J. Strommer* [6], pp. 399–400.

Theorem 4. Given any point O on the line l , there cannot be two perpendiculars drawn to l at O .

For the proof take on l the points A, B so that O is between A and B with $OA = OB$. If m and m' are perpendicular to l at O and $C \neq O$ is a point on m , the line m' cuts one of the intervals AC, BC ; let this interval be BC , say. D denote the common point of m' and BC and let E be a point between O and D ³. Since $m \perp l$ and $m' \perp l$ we have (Definition 1) $AC = BC, AE = BE$. The line CE has a point $M \neq O$ between A and B and so we have from the triangles CEA and CEB (Axiom $V_{1.1}$) $AM = BM$ i. d. M is mid-point of AB as well as O , which is impossible.

Theorem 5. A perpendicular can be drawn to a line l from any point P not O on l .

Proof. There exists a perpendicular m to l (Theorem 3). If this does not go through P , let it meet l at O . Take Q, Q' on m so that $OQ = OQ'$, O lying between Q and Q' and P, Q' on opposite sides of l . Then PQ' cuts l in S say. On QS produced take P' so that $SP = SP'$ ⁴. PP' cuts l in M say. By construction $m \perp l$, hence (Theorem 1) $l \perp m$ and we have (Definition 1) $SQ = SQ'$. By Axiom $V_{1.2}$ applied to the triangles OSQ, OSQ' we get $P'O = PO$. Thus by Axiom $V_{1.1}$ applied to the triangles SOP, SOP' we have $MP = MP'$. Since by construction $SP = SP'$, we see (Definition 1) $l \perp PP'$, consequently (Theorem 1) $PP' \perp l$, and this proves the theorem.

Theorem 6. Through any point P not on the line l goes just one perpendicular to l .

Proof. Let the perpendicular through P to l (Theorem 5) meet it in M . Suppose there exists an other perpendicular through P to l ; let it meet l in M' . Take on PM produced Q and on PM' produced R so that $MQ = MP, M'R = M'P$. Since $l \perp PQ$ (Theorem 1) we have by Definition 1 $M'P = M'Q$, consequently $M'R = M'Q$. Similarly $MQ = MR$. The mid-point of the interval QR (Theorem 2) be denoted by N . Then (Corollar of Theorem 2) $MN \perp QR$ and at the same time $M'N \perp QR$ which is impossible (Theorem 4). We see that an other perpendicular through P to l cannot exist.

Theorem 7. A perpendicular can be drawn to a line l through a given point O on l .

³ For this construction c. f. J. L. Dorroh [3], p. 229.

⁴ For this construction c. f. H. G. Forder [5], p. 273.

Proof. A perpendicular m to l exists (Theorem 3); let it meet l at M . If $M \neq O$, take P and Q on m so that $MP = MQ$, M lying between P and Q . Since $l \perp PQ$ (Theorem 1) we have (Definition 1) $OP = OQ$. Take on PO produced P' and on QO produced Q' so that $OP = OP'$, $OQ = OQ'$. Then $OP = OQ'$, $OQ = OP'$ and from the triangles $PQ'O$ and $Q'PO$ we have (Axiom $V_{2.2}$) $PQ = P'Q'$. Since also $OP' = OQ'$, from the triangles PQO and QPO we get similarly $PQ' = QP'$. $P'Q'$ cuts l in M' say. Because by construction $MP = MQ$ and as we have seen $OP = OQ$, from the triangles MPO and MQO we have (Axiom $V_{1.1}$) $PM' = QM'$. And since $OP' = OQ'$, from the triangles OPM' and OQM' we get (Axiom $V_{1.2}$) $M'P' = M'Q'$. Therefore (Definition 1) $l \perp P'Q'$ and so (Theorem 1) $P'Q' \perp l$. Since at the same time $PQ \perp l$, the lines PQ and $P'Q'$ cannot meet each other (Theorem 6). Consequently the intervals MP' and $M'Q$ have a point S in common. Since as we have seen above, $PQ = P'Q'$ and $MP = MQ$, $M'P' = M'Q'$, we have $MQ = M'P'$. Therefore, because by construction evidently $PP' = QQ'$, from the triangles PQP' and $Q'P'Q$ we have (Axiom $V_{2.2}$) $MP' = M'Q$. Consequently by Lemma 2 applied to the triangles $QP'M$ and $P'QM'$ holds $SM = SM'$, $SQ = SP'$. Hence, since $OQ = OP'$, from the triangles OSQ and OSP' we have (Axiom $V_{1.2}$) $OM' = OM$, which with $SM' = SM$ together show (Definition 1) that $OS \perp l$, thus the statement is proved.

Theorem 8. Every interval AB has a mid-point.

Proof. At A , B erect perpendiculars AP , BQ (Theorem 7); take P , Q on the same side of AB with $AP = BQ$ and on QB produced Q' so that $BQ = BQ'$. Then PQ' cuts AB in S say. Take P' on QS produced so that $SP = SP'$. Then, as in the proof of Theorem 5, $PP' \perp AB$ and (Theorem 6) PP' cuts AB just in point A with $AP = AP'$. Since (see the proof of Theorem 5) $SQ = SQ'$ and by construction $SP' = SP$, we have $QP' = Q'P$. But $PP' = QQ'$ since as we have seen before $AP' = AP = BQ = BQ'$, and because $PA = QB$, from the triangles PQP' and QPQ' we get (Axiom $V_{2.2}$) $AQ = BP$. As the perpendiculars AP , BQ to AB cannot meet each other (Theorem 6), the intervals AQ , BP have a point T in common and by Lemma 2 applied to the triangles ABP and BAQ we have $AT = BT$. Consequently (Theorem 2) the side AB of the triangle ABT has a mid-point, as stated.

Theorem 9. In the figure of the proof of Theorem 8, S is the mid-point of the interval AB .

Proof. By Lemma 2 applied to the triangles PQP' and QPQ' we have $SP = SQ$. Let M be the mid-point of the interval AB (Theorem 8)

i. d. $AM = BM$. Then by Axiom $V_{2.1}$ applied to the triangles ABP and BAQ we have $MP = MQ$. Denote N the mid-point of the interval PQ (Theorem 2); then (Corollar of Theorem 2) $NM \perp PQ$. Nevertheless we have $NS \perp PQ$ because $SP = SQ$. Consequently the lines NM and NS coincide (Theorem 4), hence $S = M$ which proves the theorem.

Definition 2. Let l be a line and P a point not on l and m the perpendicular to l through P (Theorem 5, 6) meeting l in A . Take on PA produced P' so that $PA = P'A$. We may say that P' is the *image* of P in the line l . If P is on l , then we may say that the image of P in l is P itself. The transformation which turns points into their images in l is a *reflection* in l .

Theorem 10. If P' , Q' are images of P , Q respectively in the line l , then $PQ = P'Q'$.

Proof. If P or Q lies on l , the statement is evident (Definitions 1, 2, Theorem 1). In other case PP' , QQ' cut l in A , B respectively, say. We can suppose $A \neq B$, otherwise the proof is immediate. By assumption we have (Definition 2) $PP' \perp l$, $AP = AP'$, $QQ' \perp l$, $BQ = BQ'$.

First let P , Q be on the same side of l and hence Q' , P' on opposite sides. $Q'P$ cuts l in S say. On QS produced take P'' so that $SP = SP''$. Then PP'' cuts l in A' say and (see the proof of Theorem 5) $A'P = A'P''$, $PP'' \perp l$. Consequently (Theorem 6) $P'' = P'$ i. d. the points P' , S , Q are collinear and $P'S = PS$. But, as in the proof of Theorem 5, $SQ = SQ'$ and from the triangles $QQ'S$ and $Q'QS$ we have (Axiom $V_{2.2}$) $PQ = P'Q'$.

At the same time $Q'P = QP'$ since $PS = P'S$ and $SQ' = SQ$, as we have just silently used, and it follows that the statement is true in all cases.

Corollar. The images of three collinear points are collinear points. (By Lemma 1.)

Theorem 11. If ABC is a triangle with $AC = BC$ and M denote the mid-point of the side AB , then the reflection in the line CM turns the ray CA into CB .

Proof. Let us consider on the ray CA a point P different from A and C . Take Q on the ray CB so that $CP = CQ$. By Axiom $V_{1.2}$ applied to the triangles AMC and BMC we have $PM = QM$. Consequently, if PQ meet the ray CM in N say, by Axiom $V_{1.1}$ applied to the triangles MCP and MCQ we get $NP = NQ$. Therefore (Definition 1) $CN \perp PQ$ since $CP = CQ$. But (Theorem 1) then $PQ \perp CN$, hence (Definition 2) Q is the image of P in CM . This is evident in the case $P = A$ or $P = C$. Hence the reflection in CM turns the ray CA into CB as stated.

Theorem 12. Any ray can be transformed into any other by two reflections at most.

This statement follows at once from Theorems 8, 7, 1, 11 and from Corollar of Theorem 10.

Corollar 1. If ABC is a given triangle and $AB = A'B'$, then on every sides of $A'B'$ there is just one point C' so that $BC = B'C'$ and $CA = C'A'$. (By theorems 10, 2, 4.)

Corollar 2. Any right angle (an angle with two perpendicular arms) can be transformed into any other by a series of reflections. (By Theorems 10, 4.)

Corollar 3. If ABC and $A'B'C'$ are two triangles with $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, further D and D' points on the rays AC , $A'C'$ (or their opposites) respectively, E and E' on the rays AB , $A'B'$ (or their opposites) respectively, and if $AD = A'D'$, $AE = A'E'$, then $DE = D'E'$. (By Corollar 1 and Theorem 10.)

This latter corollar is the generalization of the above Axioms V_1 , V_2 due to *H. G. Forder*. It was (in not such a general way) assumed by *J. Møllerup*⁵ as an axiom which in its essential form is due to *G. Veronese*⁶. As mentioned already⁷, *R. L. Moor* and *J. L. Dorroh* postulated it for the case that $E = B$, $E' = B'$ while D and D' are points on CA , $C'A$ produced, respectively.

⁵ See [1], p. 479.

⁶ See [7], p. 260, Axiom V.

⁷ See p. 270.

References

- [1] *J. Møllerup*, Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel. *Mathematische Annalen*, 58 (1904), 479—496.
- [2] *R. L. Moor*, Sets of metrical hypotheses for geometry. *Transactions of The American Mathematical Society*, 9 (1908), 487—512.
- [3] *J. L. Dorroh*, Concerning a set of metrical hypotheses for geometry. *Annals of Mathematics*, (2) 29 (1928), 229—231.
- [4] *J. L. Dorroh*, Concerning a set of axioms for semiquadratic geometry of a three space. *Bulletin of The American Mathematical Society*, 36 (1930), 719—721.
- [5] *H. G. Forder*, On the axioms of congruence in semiquadratic geometry. *The Journal of The London Mathematical Society*, 22 (1947), 268—275.
- [6] *J. Strommer*, Über die Begründung der Kongruenz Tatsachen der ebenen Geometrie. *Publicationes Mathematicae* (Debrecen, Hungary), 7 (1960), 394—407.
- [7] *G. Veronese*, *Grundzüge der Geometrie etc.*, übersetzt von *A. Schepp*, Leipzig, 1894.

Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung

Von

O. Varga, Budapest

Herrn Professor E. Kruppa zum 75. Geburtstag gewidmet

(Eingegangen am 5. Dezember 1960)

Das *F. Schur* — *E. Cartansche* Ebenenkriterium¹ kennzeichnet die Riemannschen Räume konstanter Krümmung unter den allgemeinen Riemannschen Räumen.

In vorliegender Arbeit zeigen wir, daß auch die Finslerschen Räume von konstantem Krümmungsmaß, unter der allgemeinen Finslerschen Räumen dadurch gekennzeichnet sind, daß es zu jeder beliebigen $(n-1)$ -Stellung des Raumes eine berührende totalgeodätische Fläche gibt (Satz 4).

Zur Herleitung dieses Ergebnisses geben wir, gestützt auf eine andere Arbeit², zunächst ein Kriterium (Satz 1) für den totalgeodätischen Charakter einer, durch eine implizite Darstellung gegebenen Fläche. Den Beweis der unbeschränkten Existenz von Totalgeodätischen in Finslerräumen konstanter Krümmung beinhaltet Satz 2, während in Satz 3 umgekehrt gezeigt wird, daß Räume in denen unbeschränkt totalgeodätische Flächen existieren von konstantem Krümmungsmaß sind.

Als Krümmungsmaß einer 2-Stellung wurde die erstmals von *L. Berwald*³ eingeführte Invariante verwendet.

Unsere Untersuchungen sind von lokalem Charakter.

¹ Siehe *E. Cartan* (1) insbes. S. 118—126 und *F. Schur* (1). Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Nummern.

² *O. Varga* (2).

³ Siehe *L. Berwald* (1), § 6.

Zugrunde gelegt sei ein n -dimensionaler Finslerscher Raum F_n^4 . In einem lokalen Koordinatensystem $(x^i, \dot{x}^i)$ sei das Bogenelement ds mit Hilfe der Grundfunktion $L(x, \dot{x})$ in der Form

$$ds = L(x, dx) \quad (1)$$

darstellbar. Wir setzen voraus, daß $L(x, dx)$ über die Konvexität hinaus, den in der Cartanschen Theorie der Finslerschen Räume üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genügt.

Wir wollen zunächst untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine durch

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \quad (2)$$

definierte Fläche totalgeodätisch ist, d. h. jede die Fläche berührende Raumgeodätische ganz auf der Fläche liegt und demnach auch Flächengeodätische ist. Dazu benützen wir neben der Darstellung (2) auch die Parameterdarstellung

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}). \quad (3)$$

Die Ableitungsgleichungen der Tangentenvektoren x_a^i von (3) können in der Form

$$Dx_a^i = (K_{a\beta}^{*\sigma} du^\beta + A_{a\beta}^\sigma \overset{(1)}{D}l^\beta) x_a^i + (\Theta_{a\beta}^{*\sigma} du^\beta + \Theta_{a\beta}^\sigma \overset{(2)}{D}l^\beta) n^i \quad (4)$$

dargestellt werden, wobei $\overset{(1)}{D}$ der Cartansche invariante Differentialoperator bzgl. der — als $(n-1)$ -dimensionalen Finslerschen Raumes betrachteten — Hyperfläche ist. Es handelt sich also um den inneren Zusammenhang der, als Ort der Linienelemente $(u, \dot{u})$ betrachteten Hyperfläche⁵.

Die aus der Identität

$$\Phi(x(u)) \equiv 0 \quad (5)$$

durch Ableitung hinsichtlich u^a gewonnene Relation

$$\Phi_i x_a^i \equiv 0; \quad \Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (6)$$

gibt

$$D \Phi_i x_a^i + \Phi_i D x_a^i = 0. \quad (7)$$

Beachten wir, daß

$$D \Phi_i = \Phi_{i/k} dx^k + \Phi_{i;k} D l^k \quad (8)$$

⁴ Die hier benutzten Grundbegriffe der Finslerschen Geometrie findet man in *E. Cartan* (2) oder *H. Rund* (1).

⁵ Siehe *E. Cartan* (2) insbes. S. 24–26.

mit

$$\Phi_{i;k} = -A_{ik}^s \Phi_s$$

ist, und wählen als spezielle Fortschrittingsrichtung für dx^k die Hyperfläche, und beachten, daß sich aus den Ableitungsgleichungen

$$Dl^i = \left[\frac{1}{L} (K_{\beta}^{*\sigma} - G_{\beta}^{\sigma}) x_{\sigma}^i + O_{\beta} n^i \right] du^{\beta} + x_{\beta}^i Dl^{\beta} O_{\beta} = \Theta_{\mu\beta}^{* \quad \dot{a}j \quad (1)} \dot{u}^{\mu}, K_{\beta}^{*\sigma} = K_{\mu\beta}^{*\sigma} \dot{u}^{\mu} \quad (9)$$

ergibt, so kommt aus (7)

$$\Phi_{i/k} x_{\alpha}^i x_{\beta}^k - A_{ik}^s \Phi_s x_{\alpha}^i \left[\frac{1}{L} (K_{\beta}^{*\sigma} - G_{\beta}^{\sigma}) x_{\sigma}^k + O_{\beta} n^k \right] + (n^s \Phi_s) \Theta_{\alpha\beta}^{* \quad (1)} = 0. \quad (10)$$

Überschreiben wir diese Gleichung mit $\dot{x}^i$, so folgt

$$\Phi_{i/k} \dot{x}^i x_{\beta}^k = -\sqrt{g^{rs}} \Phi_r \Phi_s O_{\beta} \quad (\sqrt{g^{rs}} \Phi_r \Phi_s = n^s \Phi_s). \quad (11)$$

Für eine totalgeodätische Fläche mit der Parameterdarstellung (3) ist aber⁶

$$O_{\alpha} \equiv 0 \quad (12)$$

Somit folgt

$$\Phi_{i/k} \dot{x}^i t^k = \Phi_{i/k} t^i \dot{x}^k = 0, \quad (13)$$

falls

$$\Phi_k t^k = 0 \quad (14)$$

ist. Das gibt den folgenden

Satz 1. Eine durch (2) dargestellte Hyperfläche ist dann und nur dann totalgeodätisch, falls für jedes Linienelement x^i , $\dot{x}^i$ und jedem Vektor x^i , t^i für die

$$\Phi(x) = 0, \quad \Phi_i(x) \dot{x}^i = 0$$

sowie

$$\Phi(x) = 0, \quad \Phi_i(x) t^i = 0$$

gilt, die Relation (13) folgt, wobei der Wert der kovarianten Ableitung in dem Linienelement x^i , $\dot{x}^i$ zu nehmen ist.

Wir wollen jetzt für die zu einer totalgeodätischen Fläche gehörenden Größen $\Theta_{\alpha\beta}^{* \quad (1)}$ eine Darstellung geben, die einerseits (12) in Evidenz setzt und andererseits für einen gleich zu benützenden Ansatz wichtig sein wird.

Für das invariante Differential Dx_{α}^i , dessen Stützelement die Hyperfläche berühren soll, erhält man wegen (9) und dem Umstand, daß für totalgeodätische Flächen neben (12)

⁶ Vgl. O. Varga (2) insbes. Satz 1.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*\sigma} = K_{\alpha\beta}^{*\sigma} \quad (15)$$

und

$$K_{\beta}^{*\sigma} = G_{\beta}^{\sigma} \quad (15')$$

gilt⁷, den Ausdruck

$$D x_a^i = (x_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{jk}^{*i}) du^{\beta} + A_{jk}^i x_{\alpha}^j x_{\beta}^k D l^{\beta}. \quad (16)$$

Vergleicht man die Pfaffschen Formen (16) mit (4), so erhält man

$$\Theta_{\alpha\beta}^{*(1)} = (x_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{jk}^{*i} x_{\alpha}^j x_{\beta}^k) n_i. \quad (17)$$

Werden neben den Formen $\Theta_{\alpha\beta}^{*(1)}$ die durch

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta}^{*} = \sqrt{g^{ik}} \Phi_i \Phi_k \Theta_{\alpha\beta}^{*(1)} = (x_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{jk}^{*i} x_{\beta}^k) \Phi_i \quad (18)$$

bestimmten eingeführt, so erhält man durch Differentiation von

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta}^{*} \dot{u}^{\alpha} \equiv 0 \quad (19)$$

hinsichtlich $\dot{u}^{\gamma}$

$$\bar{\Theta}_{\gamma\beta}^{*} = - \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha\beta}^{*}}{\partial \dot{u}^{\gamma}} \dot{u}^{\alpha}. \quad (20)$$

Da aus einer Formel von E. Cartan⁸

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial \dot{x}^r} \dot{x}^j = A_{kr/0}^i \quad (21)$$

folgt, kommt demnach wegen (18) und (19)

$$\bar{\Theta}_{\alpha\beta}^{*} = - A_{kr/0}^i \Phi_i x_{\alpha}^k x_{\beta}^r \quad (22)$$

und

$$\Theta_{\alpha\beta}^{*(1)} = - A_{kr/0}^i n_i x_{\alpha}^k x_{\beta}^r. \quad (23)$$

Wir weisen nun nach

Satz 2. In einem Finslerschen Raum von konstanter Krümmung gibt es zu jeder (n-1)-Stellung eine totalgeodätische Fläche.

Das Krümmungsmaß des Finslerschen Raumes ist in Bezug auf eine 2-Stellung (l, η) mit Hilfe des Krümmungstensors R_{ijkh} und des Maßtensors durch⁹

$$R(x, \dot{x}, l, \eta) = \frac{R_{ijkh} l^i \eta^j l^k \eta^h}{(g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{jk}) l^i \eta^j l^k \eta^h} = \frac{R_{ojoh} \eta^j \eta^h}{(g_{jh} - l_j l_h) \eta^j \eta^h} \quad (24)$$

⁷ Vgl. O. Varga (2) Formel (41) und (37).

⁸ Vgl. E. Cartan (2) Seite 41, Formel (44).

⁹ Siehe L. Berwald (1) § 6.

definiert. Das Krümmungsmaß ist konstant, falls der Quotient (24) unabhängig von Ort und Stellung, und demnach R eine Konstante ist.

Nach einem Ergebnis von *L. Berwald* ist ein Finslerscher Raum konstanter Krümmung R durch die Relation

$$R_{ijkh} + A_{ik|o}^n A_{jnh|o} - A_{ih|o}^m A_{jmk|o} = R(g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{jk}) \quad (25)$$

gekennzeichnet und es gilt ferner

$$A_{ij}^m R_{omkh} = A_{ijk|o|h} - A_{ijh|o|k} \cdot^{10} \quad (26)$$

Zum Beweis von Satz 2. benötigen wir noch folgende, durch eine formale Rechnung ableitbare Vertauschungsformel für die zweiten kovarianten Ableitungen eines Vektorfeldes $p_i(x, \dot{x})$:

$$p_{i|k|j} - p_{i|j|k} = -p_r (R_i r_{kj} - A_{im}^r R_0 m_{kj}) - L \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^r} R_0 r_{kj}, \quad (27)$$

sowie die Bemerkung, daß die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^j \partial x^k} = 0$$

mit der Gleichung

$$p_{i|k|j} - p_{i|j|k} + p_r (R_i r_{kj} - A_{im}^r R_0 m_{kj}) + L \frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^r} R_0 r_{kj} = 0 \quad (28)$$

gleichbedeutend sind.

Zum Beweis von Satz 2. betrachten wir im Finslerschen Raum konstanter Krümmung R das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = p_i \quad (29)$$

$$p_{i|k} = -R g_{ik} + A_{ik|0}^s \Phi_s.$$

Die Betrachtung dieses Gleichungssystems ist durch (11) und (23) nahegelegt.

Da jetzt

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^r} = 0$$

ist, folgt aus (27) und (28), daß das System (29) vollständig integrabel

¹⁰ Dies folgt aus den bei *L. Berwald* (2) auf S. 772, Formel (11.8) und S. 774, Formel (13.7) angegebenen Ergebnissen.

ist. Nach Vorgabe der Anfangswerte x_0^i, p_{0i}, Φ_0 gibt es somit eine eindeutige Lösung Φ, p_i für (11). Wählt man nun unter den Anfangswerten den für Φ gleich Null, und beachtet, daß

$$A_{ik|0}^R \dot{x}^i = 0$$

gilt, so folgt hieraus, daß die in jeder $(n-1)$ -Stellung eines Punktes des F_n eindeutig existierenden Flächen

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0,$$

wegen Satz 1 totalgeodätisch sind. Damit ist der Beweis für Satz 2 erbracht.

Wir wollen nun umgekehrt zeigen

Satz 3. Existiert in einem Finslerschen Raum zu jeder $(n-1)$ -Stellung eine totalgeodätische Fläche, dann ist der Raum von konstanter Krümmung und die totalgeodätischen Flächen sind ihrerseits $(n-1)$ -dimensionale Finslersche Räume konstanter Krümmung.

Zum Beweis dieses Satzes benützen wir unter anderen folgendes

Lemma: Das (Cartansche) invariante Differential des Feldes von Einheitslinienelementen l^i bzw. Stützelementen $\dot{x}^i$ der Hyperfläche gibt dann und nur dann ein Feld von Hyperflächenvektoren falls die Hyperfläche totalgeodätisch ist.

Aus (9), (15) und (15') ergibt sich sofort, daß für eine totalgeodätische Fläche

$$Dl^i = x_a^i \overset{(1)}{D}l^a \quad (l^i = x_a^i l^a) \quad (30)$$

ist. Soll weiters für irgendeine Fläche der Vektor Dl^i keine Normalkomponente besitzen, so muß (12) bestehen, woraus folgt, daß die Fläche totalgeodätisch ist. Benützen wir statt dem Feld l^i das nicht normierte Stützelementfeld

$$\dot{x}^i = x_a^i \dot{u}^a, \quad (31)$$

so ergibt sich hieraus unmittelbar

$$D \dot{x}^i = x_a^i \overset{(1)}{D} \dot{u}^a. \quad (32)$$

Hieraus folgt nun, daß mit

$$x^i = x^i(u)$$

stets auch

$$x^i = \bar{x}^i(u) \overset{df}{=} c_k^i x^k(u) + c^i \quad (33)$$

eine totalgeodätische Fläche ist, da ja auf Grund von (32) und (33)

$$D \dot{\bar{x}}^i = c_k^i D \dot{x}^k = c_k^i x_a^k D \dot{u}^a = \bar{x}_a^i D \dot{u}^a \quad (34)$$

wird. Wir betrachten nun im F_n zwei beliebige Linienelemente $(x^i, \dot{x}^i)$ und $(\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i)$ und je eine 2-Stellung B_2 und $\bar{B}_2$, die durch diese Linienelemente und je einen Vektor η^i bzw. $\bar{\eta}^{*i}$ in denselben bestimmt sind. Es möge weiters je eine B_2 bzw. $\bar{B}_2$ enthaltende $(n-1)$ -Stellung B_{n-1} bzw. $\bar{B}_{n-1}$ gegeben sein. Es existiert genau eine totalgeodätische Fläche F_{n-1} die B_{n-1} und eine $\bar{F}_{n-1}$ die $\bar{B}_{n-1}$ berührt. Die erste sei etwa durch (2) bzw. (3) dargestellt, so daß B_{n-1} durch x_a^i aufgespannt wird. Sind

$$\mathfrak{G} = || g_{ik}(x, \dot{x}) || \quad (35)$$

und

$$\bar{\mathfrak{G}} = || g_{ik}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) ||, \quad (36)$$

die zu den Linienelementen gehörenden Matrizen, dann gibt es eine reguläre Matrix

$$\mathfrak{C} = || c_{ik} || \quad (37)$$

für die

$$\mathfrak{C}' \bar{\mathfrak{G}} \mathfrak{C} = \mathfrak{G} \quad (38)$$

gilt, und die — in den laufenden Koordinaten X^i und X^i geschriebenen — Transformationen

$$\bar{X}^i - \bar{x}^i = c_k^i (X^k - x^k) \quad (39)$$

die B_{k-1} in $\bar{B}_{k-1}$ überführt und dabei

$$\bar{e}^i = c_k^i l^k \quad (40)$$

wird. $\bar{\eta}^{*i}$ ist nicht Bildvektor von η^i . Wir können aber stets einen Vektor $\bar{\eta}^i$ aus $\bar{B}_2$ wählen, so daß

$$\bar{\eta}^i = c_k^i \eta^k \quad (41)$$

wird. Nach Obigem hat die, die $\bar{B}_{n-1}$ berührende Totalgeodätische die Parameterdarstellung

$$x^i = \bar{x}^i(u^1, u^2) = c_k^i [x^k(u) - x^k] + \bar{x}^i. \quad (42)$$

Ihre Tangentenvektoren sind demnach

$$\bar{x}_a^i = c_k^i x_a^k. \quad (43)$$

Wegen (39) und (43), besitzen die Fundamentaltensoren der F_{n-1} bzw. $\bar{F}_{n-1}$ in den Linienelementen von $x^i, \dot{x}^i$ bzw. $\bar{x}^i, \dot{\bar{x}}^i$ denselben Wert. In der Tat gilt ja

$$\gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = g_{ik}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \bar{x}_\alpha^i \bar{x}_\beta^k = g_{ik}(x, \dot{x}) x_\alpha^i x_\beta^k = \gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u}). \quad (44)$$

Wir bestimmen nun das Krümmungsmaß des F_n das zu den 2-Stellungen B_2 bzw. $\bar{B}_2$ gehört. Der Nenner ist nach (24) der Inhalt des Bivektors (l^i, η^i) bzw. $\bar{l}^i, \bar{\eta}^i$). Nach dem Vorangehenden wird

$$\begin{aligned} (g_{ik}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) g_{jh}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) - g_{ih}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) g_{jk}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})) \bar{l}^i \bar{\eta}^j l^k \eta^h = \\ = (g_{ik}(x, \dot{x}) g_{jh}(x, \dot{x}) - g_{ih}(x, \dot{x}) g_{jk}(x, \dot{x})) l^i \eta^j l^k \eta^h = \\ = (g_{jh}(x, \dot{x}) - l_j l_k) \eta^j \eta^h = \\ = [\gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \gamma_{\alpha\gamma}(u, \dot{u}) - \gamma_{\alpha\gamma}(u, \dot{u}) \gamma_{\alpha\beta}(u, \dot{u})] l^\alpha \eta^\beta l^\gamma \eta^\gamma, \end{aligned} \quad (45)$$

woraus die Gleichheit der Inhalte der beiden Bivektoren folgt. Zur Bestimmung des Zählers von (24), berechnen wir die bilineare Kovariante¹¹

$$(\Delta D - D\Delta) \bar{x}^i = L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Omega_0^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, d\bar{x} D\dot{\bar{x}}). \quad (46)$$

Auf Grund von (34) hat man

$$L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Omega_0^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, d\bar{x}, D\dot{\bar{x}}) = L(x, \dot{x}) c_k^i \Omega_0^k(x, \dot{x}, dx, D\dot{x}). \quad (47)$$

Aus dieser Formel folgt aus der Definition der Formen

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) R_{0pq}^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) c_k^p x_\gamma^h x_\beta^k = \mathcal{L}(x, \dot{x}) c_m^i R_{okh}^m(x, \dot{x}). \quad (48)$$

Bis jetzt war $x, \dot{x}$ ein beliebiges Linienelement der F_{n-1} und $\bar{x}, \dot{\bar{x}}$, daß ihm zufolge (42) entsprechende Linienelement auf $\bar{F}_{n-1}$. Jetzt wählen wir wieder dasjenige Linienelementpaar für das die entsprechenden Fundamentaltensoren bei der Transformation (42) an die Relation (39) gebunden sind. Dementsprechend gilt dann für dieses Linienelementpaar

$$L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = L(x, \dot{x}). \quad (49)$$

Überschieben wir jetzt (48) mit $g_{ij}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) c_s^j$, so erhält man wegen (38) und (49)

$$R_{0pq}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) c_s^j c_k^p c_h^q = R_{oskh}(x, \dot{x}). \quad (50)$$

Wir bilden jetzt die bilineare Kovariante von Dl^i . Wegen (30) und den Ableitungsgleichungen (4) erhält man

$$\begin{aligned} (\Delta D - D\Delta) l^i = (A_{\beta\gamma|0}^\sigma x_\sigma^i - n^i \Theta_{\beta\gamma}^{(1)}) (d u^\gamma \Delta l^\beta - \delta u^\gamma D l^\beta) + \\ + R_{\alpha\beta\gamma}^\sigma x_\sigma^i (\delta u^\gamma d u^\beta - d u^\gamma \delta u^\beta). \end{aligned} \quad (51)$$

Beachten wir, daß

¹¹ Vgl. E. Cartan (2), S. 32–33 und O. Varga (1), S. 12.

$$(\Delta D - D\Delta) l^i = P_{okh}^i (dx^h \Delta l^k - \delta x^h D l^k) + R_{okh}^i (\delta x^h dx^k - dx^h \delta x^k) \quad (52)$$

ist¹² und berücksichtigen, daß die Größen dx^i und Dl^i Hyperflächenvektoren sind und daher für Dl^i (30) gilt, so kommt man zu äußeren

Formen in den du^a und Dl^a . Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_{\beta\gamma/0}^\sigma x_\sigma^i - n^i \overset{(1)}{\Theta}_{\beta\gamma}^* = A_{kh/0}^i x_\gamma^h x_\beta^k \quad (53)$$

und

$$R_{okh}^i x_\beta^k x_\gamma^h = R_{o\beta\gamma}^\sigma x_\sigma^i. \quad (54)$$

Überschieben wir (54) mit $g_{is} x_\sigma^s$, so erhält man

$$R_{oskh} x_\sigma^s x_\gamma^h x_\beta^k = R_{o\sigma\beta\gamma}. \quad (55)$$

Wir betrachten jetzt wieder das Linienelementpaar $(x, \dot{x})$, $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ für deren Maßsensoren (39) gilt, und bilden mit Hilfe der oben in diesen Linienelementen definierten Vektoren η^i , $\bar{\eta}^i$ den Zähler des Krümmungsmaßes R . Es ergibt sich wegen (50) und (55)

$$R_{oipq}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) \bar{\eta}^i l^p \bar{\eta}^q = R_{oskh}(x, \dot{x}) \eta^s l^k \eta^h = R_{o\sigma\beta\gamma}(u, \dot{u}) \eta^\sigma l^\beta \eta^\gamma. \quad (56)$$

Die Beziehungen (56) und (45) besagen, daß

$$R(x, \dot{x}, \eta) = R(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{\eta}) \quad (57)$$

besteht. Somit ist das Krümmungsmaß unabhängig von Ort und Stellung und somit konstant. Aus (56), (45) und der Konstanz von R folgt aber auch, daß das Krümmungsmaß der F_{n-1} konstant und gleich dem Krümmungsmaß des Raumes ist. Damit haben wir Satz 3 vollständig bewiesen.

Satz 2 und Satz 3 zusammen enthält folgendes Ergebnis:

Satz 4. Ein Finslerscher Raum ist dann und nur dann von konstanter Krümmung, falls zu jeder $(n-1)$ -Stellung eine totalgeodätische Fläche existiert.

Literatur

(1) *L. Berwald*: Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Zeitschr.* **25** (1926), 40–73.

(2) *L. Berwald*: Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung. *Annals of Math.* **18** (1947), 755–781.

¹² Wird in der Formel (3.3) auf S. 12 von *O. Varga* (2) statt ξ^i das Stützelement x^i eingesetzt, dann ergibt sich die Formel des Textes.

(1) *E. Cartan*: Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann 2. Ausgabe. Paris, Gauthier-Villars, 1946. VIII + 378.

(2) *E. Cartan*: Les espaces de Finsler. Actualités Scientifiques et industrielles 79. Paris, Hermann et Cie. 1934. 42.

(1) *H. Rund*: The differential geometry of Finsler spaces. Springer-Verlag, 1959. XIII + 283.

[1] *F. Schur*: Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen. Math. Ann. **27** (1886), 535–567.

(1) *O. Varga*: Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linien-elementen, insbesondere deren Aequivalenz. Publ. Math. Debrecen, **1**, 1949, 7–17.

(2) *O. Varga*: Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen. Publ. Math. Debrecen. **8** (1961).

Eine die Stichprobenverteilung betreffende Abschätzung

Von

L. Vietoris, Innsbruck

Prof. Dr. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

(Eingegangen am 30. Dezember 1960)

In meiner Abhandlung „Bemerkungen und Abschätzungen zur Induktion“¹ habe ich eine die Bernoullische Verteilung betreffende Abschätzung gegeben. Hier soll die entsprechende Abschätzung für die Stichprobenverteilung gegeben werden. Weil die dabei auszuführenden Rechnungen denen in der genannten Arbeit parallel laufen, genügt es, sich auf das gegenüber I Neue zu beschränken.

G Dinge, etwa Lose in einer Urne, mögen teils das Merkmal 0, teils das Merkmal 1 tragen, und zwar seien a Lose 0, b Lose 1 vorhanden. $a + b = G$. Wir greifen durch Zufall eine Probe von N Losen heraus. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter ihnen k Lose 1 sind, ist nach einer bekannten Formel

$$w_N(k) = \binom{b}{k} \binom{a}{l} \binom{G}{N}^{-1}, \quad (12^*)$$

wo $l = N - k$ bedeutet und $0 \leq k \leq b$, $0 \leq l \leq a$, $N \leq G$ ist.

$$\frac{w_N(k+1)}{w_N(k)} = \frac{(b-k)l}{(k+1)(a-l+1)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq N-1. \quad (13^*)$$

Demnach ist

$$w_N(k+1) \geq w_N(k),$$

je nachdem

$$k \geq \frac{N(b+1) - a - 1}{G + 2}$$

ist.

¹ Monatsh. f. Math. **64** (1960) S. 233–250. Diese Arbeit sei im Folgenden mit I bezeichnet. Die folgenden Formeln 12*, 13* ... entsprechen den Formeln 12, 13, ... von I.

Wir führen zur Vereinfachung der Schreibweise ein:

$$\alpha = a + 1, \beta = b + 1, \gamma = G + 2, M = N + 1.$$

Dann ist.

$$\alpha + \beta = \gamma, \quad 1 \leq \alpha \leq \gamma - 1, \quad 1 \leq \beta \leq \gamma - 1, \quad 0 \leq k \leq \beta - 1, \\ 0 \leq l \leq \alpha - 1, \quad k + l = M - 1 \leq \gamma - 2.$$

Damit ist

$$w_N(k+1) \geq w_N(k), \text{ je nachdem } k \geq \frac{(M-1)\beta - \alpha}{\gamma} \text{ ist.}$$

k_0 sei die durch die folgenden Ungleichungen definierte natürliche Zahl

$$\frac{(M-1)\beta - \alpha}{\gamma} < k_0 \leq \frac{(M-1)\beta - \alpha}{\gamma} + 1 = \frac{M\beta}{\gamma}, \text{ d. h. } k_0 = \left\lceil \frac{M\beta}{\gamma} \right\rceil. \quad (14^*)$$

Dann ist²

$$\dots < w(k_0 - 1) \leq w(k_0) > w(k_0 + 1) > w(k_0 + 2) > \dots \quad (15^*)$$

Für $h = -k_0 + 1, -k_0 + 2, \dots, M - 1 - k_0, h \leq \beta - 1 - k_0$ ist einerseits

$$\frac{w(k_0 + h)}{w(k_0 + h - 1)} = \frac{(\beta - k_0 - h)(M - k_0 - h)}{(k_0 + h)(\alpha - M + k_0 + h)} \geq \\ \geq \exp \frac{-\gamma h}{\left(\beta - \frac{M\beta}{\gamma} - h\right)\left(\frac{M\alpha}{\gamma} - h\right)}, \quad (16^*)$$

andererseits

$$\frac{w(k_0 + h)}{w(k_0 + h - 1)} < \exp \frac{-\gamma(h - 1)}{\left(\alpha - \frac{M\alpha}{\gamma} + h - 1\right)\left(\frac{M\beta}{\gamma} + h - 1\right)}. \quad (17^*)$$

Nun ist wegen (17*) für $1 \leq n \leq M - 1 - k_0$

$$\frac{w(k_0)}{w(k_0 + n)} < \exp \frac{\frac{1}{2}(n - 1) n \gamma}{\left(\alpha - \frac{M\alpha}{\gamma} + n - 1\right)\left(\frac{M\beta}{\gamma} + n - 1\right)} = g_3^{-1}. \quad (19^*)$$

Wegen (16*) ist für $2 \leq n \leq k_0$

$$\frac{w(k_0 - 1)}{w(k_0 - n)} \geq \exp \frac{\frac{1}{2}(n - 1) n \gamma}{\left(\beta - \frac{M\beta}{\gamma} + n - 1\right)\left(\frac{M\alpha}{\gamma} + n - 1\right)} = g_4^{-1} \quad (20^*)$$

Bei festem γ und M haben die Nenner in (19*) und (20*) als Funktionen von α das gemeinsame Maximum

² Den Zeiger N bei $w_N(x)$ wollen wir von nun an weglassen.

$$\{M(1 - \frac{M}{\gamma}) + n - 1\}^2 \{4 \frac{M}{\gamma} (1 - \frac{M}{\gamma})^{-1}.$$

Deshalb ist

$$g_i^{-1} > \exp \frac{2n(n-1)M(1 - \frac{M}{\gamma})}{\{M(1 - \frac{M}{\gamma}) + n - 1\}^2} = g_0^{-1}$$

für $i = 3, 4$. $g_0 < 1$ für $n = 2, 3, \dots$

Damit ergeben (19*) und (20*)

$$w(k_0) > w(k_0 + n) g_0^{-1} \quad \text{für } 1 \leq n \leq M - 1 - k_0$$

$$w(k_0 - 1) > w(k_0 - n) g_0^{-1} \quad \text{für } 2 \leq n \leq k_0.$$

Man bestätigt nun leicht, daß genau wie bei der Bernoullischen Verteilung gilt:

$$\frac{w(k_0)}{w(k_0 + n)} < \frac{w(k_0 + 1)}{w(k_0 + n + 1)} < \frac{w(k_0 + 2)}{w(k_0 + n + 2)} < \dots \quad (24^*)$$

$$\frac{w(k_0 - 1)}{w(k_0 - n)} < \frac{w(k_0 - 2)}{w(k_0 - n - 1)} < \frac{w(k_0 - 3)}{w(k_0 - n - 2)} < \dots \quad (25^*)$$

Deshalb gelten die Formeln (26) und (27) von I, wenn nur g durch g_0 ersetzt wird, auch hier und führen zu

$$1 - g_0 < w(k_0 - n + 1) \leq N h_N \leq k_0 + n - 1 < \\ < w(\frac{M\beta}{\gamma} - n \leq N h_N \leq \frac{M\beta}{\gamma} + n - 1) \quad \text{für } n = 2, 3, \dots \quad (29,1^*)$$

Dabei bedeutet h_N jetzt die relative Häufigkeit der 1 in einer Probe von N Losen. $h_N = k/N$.

Wie in I nehmen wir für vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$n = [N\varepsilon], \text{ d. h. } N\varepsilon - 1 < n \leq N\varepsilon.$$

Für $2 \leq [N\varepsilon]$ gibt (29,1*)

$$1 - g_0 < w(\frac{\beta}{\gamma} - \varepsilon \leq h_N \leq \frac{\beta}{\gamma} + \varepsilon).$$

Damit ist die folgende — für $[N\varepsilon] < 2$ triviale — Behauptung bewiesen:

In einer Urne seien $\alpha - 1$ Lose 0, $\beta - 1$ Lose 1 und sonst keine Lose. Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich die relative Häufigkeit der 1 in einer Probe von N Losen von $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ um höchstens ε unterscheidet.

$$w\left(\left|h_N - \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \exp \frac{-2[N\varepsilon][N\varepsilon - 1](N+1)\left(1 + \frac{N+1}{\alpha + \beta}\right)}{\left\{N + [N\varepsilon] - \frac{(N+1)^2}{\alpha + \beta}\right\}^2} \geq (11*)$$

$$\geq 1 - \exp \frac{-2N\varepsilon^2\left(1 - \frac{1}{N\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{2}{N\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(1 + \frac{N+1}{\alpha + \beta}\right)}{\left\{1 + \varepsilon - \frac{(N+1)^2}{N(\alpha + \beta)}\right\}^2}. \quad (11'*)$$

Man sieht unmittelbar, daß (11*) und (11'*) für $\alpha + \beta \rightarrow \infty$ bei festem N gegen (11) und (11') von I konvergieren.

Flächen mit ebenen Fallinien

Von

Walter Wunderlich, Wien

Prof. E. Kruppa zum 75. Geburtstag

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. Oktober 1960)

I. Einleitung

Die kartenmäßige Darstellung der Geländeﬂäche durch einen Schichtenplan wird gelegentlich durch das System der Fallinien ergänzt. Während die *Schichtenlinien* als Horizontalschnitte der Fläche naturgemäß ebene Kurven sind, sind die sie rechtwinklig durchsetzenden *Fallinien* im allgemeinen echte, gewundene Raumkurven. Die Frage, ob es Flächen gibt, deren sämtliche Fallinien gleichfalls *ebene Kurven* sind, ist sofort zu bejahen: Abgesehen von der *Ebene* und beliebigen *Horizontalzylindern* sind leicht weitere triviale Beispiele in Gestalt der *Drehflächen mit lotrechter Achse* anzugeben, deren Schichtenlinien von den Parallelkreisen und deren Fallinien von den Meridianen gebildet werden. Allgemeiner könnten noch die *Gesimsflächen mit lotrechtem Evolutenzylinder* namhaft gemacht werden; dieselben werden von einer ebenen Profilkurve erzeugt, deren Ebene auf einem lotrechten Zylinder abrollt, wobei die einzelnen Profilkpunkte die Schichtenlinien beschreiben, während die einzelnen Lagen des erzeugenden Profils die Fallinien abgeben.

Das erste nichttriviale Beispiel dürfte *E. Müller* gegeben haben, als er die *Schraubflächen* mit ebenen Fallinien bestimmte¹. Ausgehend von der Feststellung, daß die Falltangente einer Schraubfläche mit lotrechter Achse auch Schraubtangente sind (als Erzeugende von

¹ *E. Müller*: Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 120 (1911), 1763—1810, insb. 1797.

umschriebenen Schraubtorse), also dem quadratischen (tetraedralen) Schraubtangentialkomplex angehören, gewinnt man die genannten Flächen einfach durch Verschraubung ebener Komplexkurven. Dies sind gewisse *Parabeln*, die folgendermaßen erhalten werden können: Man greift eine beliebige Schraubtangente t heraus und betrachtet die Bahntangenten ihrer Punkte; diese Tangenten liegen allesamt in einer Ebene (welche die von t überstrichene Schraubtorse längs t berührt) und hüllen die benötigte Komplexparabel ein, deren einzelne Schraublagen die Fallinien der erzeugten Fläche bilden. — In ganz analoger Weise lassen sich auch die *Spiralflächen* mit ebenen Fallinien aus einer Komplexparabel des tetraedralen Spiraltangentialkomplexes herleiten².

Ein interessantes Beispiel für eine *algebraische Fläche* mit ebenen Fallinien ist die von *L. Eckhart* gefundene Fläche 4. Ordnung mit der kartesischen Gleichung

$$\frac{x^2}{1 - z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1. \quad (1)$$

Ihr Schichtenplan besteht aus *konfokalen Hyperbeln* $z = \text{const}$, so daß die Falliniengrundrisse von den zugehörigen *konfokalen Ellipsen* gebildet werden; letztere rühren aber, wie man leicht nachprüft, von den ebenen Schnitten $z/y = \text{const}$ her, die sich im übrigen als *Kreise* erweisen³. — Der *Grenzfall* mit *Parabeln* als Schichten- und Fallinien, beschrieben durch

$$y^2 = 2xz^2 + z^4, \quad (2)$$

ist eine weitgehend spezialisierte *Steinersche Römerfläche*⁴.

II. Flächen mit ebenen Fallinien zu einem Schichtenplan aus konfokalen Kegelschnitten

L. Eckhart hatte geglaubt, mit den Flächen (1) und (2) und gewissen komplex-affinen Seitenstücken von (1) — s. u. (7a) und (7b) — sämtliche Flächen mit ebenen Fallinien erhalten zu haben, deren *Schichtenplan* von einer Schar *konfokaler Kegelschnitte* gebildet wird. Daß es aber noch andere, und zwar allgemeinere Flächen dieser Art gibt, soll nunmehr durch deren vollständige Aufzählung ausgeführt werden.

² *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Monatsh. Math. Phys. 46 (1938), 248—265, insb. 255.

³ *L. Eckhart*: Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417—427.

⁴ Vgl. diesbez. *W. Wunderlich*: Römerflächen mit ebenen Fallinien. Erscheint im Bompiani-Jubiläumsband der Annali di Matematica.

Flächengleichung 8. Grades, auf deren Wiedergabe wegen ihrer Länge jedoch verzichtet sei. Abb. 2 zeigt eine anschauliche Ansicht eines Flächenteils, den man sich noch an den Koordinatenebenen gespiegelt

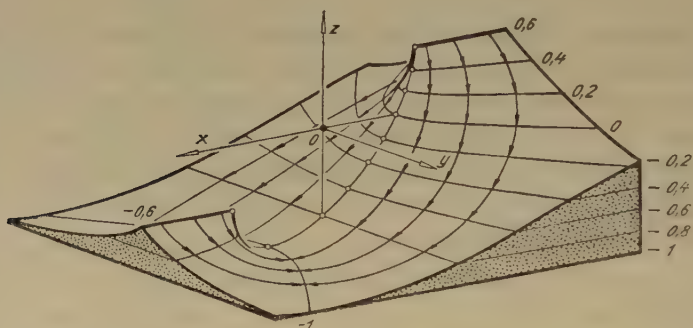


Abb. 2. Axonometrisches Bild einer Fläche 8. Ordnung mit Hyperbeln als Schichtenlinien und Ellipsen als Falllinien ($a = 3/5$, $b = 4/5$).

zu denken hat. Eine Ausnahme tritt lediglich in den Fällen $a = 0$ oder $b = 0$ ein, die auf *Flächen 4. Ordnung* führen: Im ersten Fall verschmelzen die beiden Profilellipsen zu einem Kreis und man erhält die *Eckhartsche Fläche* (1); im zweiten Fall stellt sich ein komplex-affines Seitenstück mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{1 - z^2} = 1 \quad (7a)$$

ein, bei welchem die Profilellipsen auf die beiden Quadratdiagonalen zusammenschrumpfen.

Die *Fallellipsen* $u = \text{const}$ verlaufen in den *Ebenen*

$$z = \frac{\pm ax}{\text{ch } u} + \frac{by}{\text{sh } u}, \quad (8a)$$

die in den Sonderfällen $a = 0$ bzw. $b = 0$ ein *Büschel* mit der x - bzw. y -Achse als Träger erfüllen⁵. Im allgemeinen Fall hüllen sie einen vom Ursprung ausstrahlenden *Kegel* ein, für den man über die partielle Ableitung von (8a) nach u die Parameterdarstellung

$$\pm ax : by : z = \text{ch}^3 u : -\text{sh}^3 u : 1 \quad (9a)$$

⁵ *Eckhart* war der Meinung, dies unter allen Umständen annehmen zu können (a. a. O. 425), wodurch ihm die Flächen 8. Ordnung entgingen.

findet, woraus die kartesische Gleichung

$$\left(\frac{ax}{z}\right)^{2/3} - \left(\frac{by}{z}\right)^{2/3} = 1 \quad (10a)$$

fließt. Dieser Kegel besitzt mithin *Hyperbelevoluten* zu Schichtenlinien (für $z = \pm 1$ sind es die Evoluten der zugehörigen Schichtenhyperbeln der Fläche) und es läßt sich zeigen, daß es sich um den gemeinsamen Evolutenkegel 4. Klasse zweier polarer Kegel 2. Grades

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = z^2 \quad (11a)$$

handelt, deren Formparameter α, β durch das Gleichungspaar

$$a\alpha + b\beta = 1, \quad b\alpha - a\beta = \alpha\beta \quad (12a)$$

bestimmt sind.

Die analoge Ermittlung aller Flächen mit ebenen Fallinien zu einem *Schichtenplan aus konfokalen Ellipsen* kann gleichfalls vom Ansatz (3a, b) ausgehen, wobei lediglich ein Rollentausch der u - und v -Linien vorzunehmen ist. Aus der resultierenden Differentialgleichung

$$z''' - z' = 0 \quad (4b)$$

erhält man die Lösung

$$z = a \operatorname{ch} u + b \operatorname{sh} u + c, \quad (5b)$$

wobei die additive Konstante c wieder unterdrückt werden darf und die Koeffizienten a und b durch $a^2 - b^2 = +1, -1, 0$ normiert werden können. Dementsprechend sind hier drei Untertypen zu unterscheiden, die durchwegs wieder *Flächen 8. Ordnung* umfassen, mit Ausnahme der beiden schon bei *Eckhart* auftretenden *Grenzformen 4. Ordnung* $a = 0$ und $b = 0$: Im ersten Fall besitzt die Fläche die kartesische Gleichung

$$\frac{x^2}{1 + z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1, \quad (7b)$$

im zweiten Fall begegnet man neuerlich der Fläche (7a), die auf ihren verschiedenen Mänteln sowohl elliptische als auch hyperbolische Schichtenlinien aufweist. — Die *Fallhyperbeln* $v = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$z = \frac{\pm ax}{\cos v} + \frac{by}{\sin v}, \quad (8b)$$

die in den Eckhartschen Grenzfällen Büschel um die x - bzw. y -Achse

bilden, während sie im allgemeinen Fall einen *Hüllkegel 4. Klasse* mit der Parameterdarstellung

$$\pm ax : by : z = \cos^3 v : \sin^3 v : 1 \quad (9b)$$

und der kartesischen Gleichung

$$\left(\frac{ax}{z}\right)^{2/3} + \left(\frac{by}{z}\right)^{2/3} = 1 \quad (10b)$$

besitzen. Seine Schichtenlinien $z = \text{const}$ sind im Fall $a^2 = b^2$ *Astroiden*, sonst *Affine* dazu.

Der Übergangsfall der Flächen mit ebenen Falllinien zu einem *Schichtenplan aus konfokalen Parabeln* kann etwa mit dem Ansatz

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = z(v) \quad (3c)$$

behandelt werden und führt über die Differentialgleichung $z''' = 0$ auf die Lösung

$$z = av^2 + 2bv + c, \quad (5c)$$

in welcher $c = 0$ gesetzt und a und b geeignet normiert werden können. Im allgemeinen erhält man eine *Steinersche Römerfläche 4. Ordnung*⁴, darunter für $a = 0$ den bereits bekannten *Eckhartschen Grenzfall* (2); der andere Grenzfall $b = 0$ führt auf *Reyesche Kegel 2. Grades*⁶

$$a^2 y^2 = 4z(ax + z). \quad (7c)$$

Die *Fallparabeln* $u = \text{const}$ verlaufen in den Ebenen

$$aux - by + uz = av^3, \quad (8c)$$

die im allgemeinen Fall einen *Zylinder 3. Klasse*

$$ax + z = 3au^2, \quad by = 2au^3 \quad (9c)$$

einhüllen; derselbe hat die Erzeugendenrichtung $-1:0:a$ und als Schichtenlinien *Neilsche Parabeln* (*Parabelevoluten*). in den genannten Grenzfällen bilden die Ebenen Büschel $y/z = \text{const}$ bzw. $ax + z = \text{const}$.

III. Allgemeine Lösung des Problems der Flächen mit ebenen Falllinien

Greift man bei einer beliebigen Fläche Φ aus den ∞^2 Tangentialebenen jene heraus, die eine *feste Neigung* α gegen die Waagrechte

⁴ Der „*Reyesche Kegel*“ ist polar zum „orthogonalen“ Kegel 2. Grades und dadurch ausgezeichnet, daß in einer Hauptsymmetrieebene die Fokalstrahlen zu den Scheitelerzeugenden normal sind; er wird erzeugt durch kongruente Strahlbüschel mit gemeinsamem Scheitel oder durch projektive Strahlbüschel, bei welchen entsprechende Strahlen einen rechten Winkel bilden.

haben, so erhält man eine einparametrische Ebenenschar, die eine *Böschungstorse* Δ einhüllt, das ist die Tangentenfläche einer gewissen Raumkurve p mit der konstanten Steigung α . Diese Böschungstorse Δ ist der Fläche Φ längs einer Kurve q angeschrieben, die man bei Annahme lotrecht einfallenden Lichts als *Isophote* von Φ , d. h. als Kurve konstanter Helligkeit ansprechen kann. Die Erzeugenden e der Böschungstorse sind deren Fallinien, also *Falltangenten* von Φ (Abb. 3). Läßt man die Neigung α variieren, so erhält man sämtliche der Fläche Φ umschriebenen Böschungstorsen, deren ∞^1 Gratlinien p eine gewisse Fläche Ψ erfüllen, die offenbar von allen ∞^2 Falltangenten der Fläche Φ berührt wird: Ψ stellt mithin (neben Φ) die *zweite Brennfläche der Falltangentenkongruenz* von Φ dar.

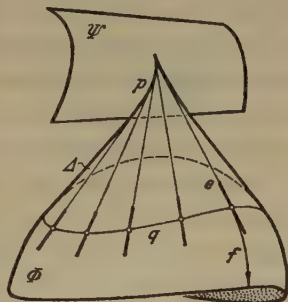


Abb. 3

Fassen wir nun eine *Falllinie* f von Φ ins Auge, so müssen nach dem Gesagten ihre sämtlichen Tangenten den Brennflächenmantel Ψ berühren. Ist f speziell eine *ebene Kurve*, so verlaufen ihre Tangenten in einer Ebene ε , die Ψ längs einer Linie berühren wird. Sind aber sämtliche ∞^1 Fallinien von Φ eben, so erscheint die Fläche Ψ als Einhüllende der Ebenenschar ε und muß demnach eine *Torse* sein. Damit ergibt sich die folgende *geometrische Erzeugungsweise einer Fläche Φ mit ebenen Fallinien*: „Man nehme eine beliebige Torse Ψ an, zeichne auf ihr eine einparametrische Schar von *Böschungslinien* p mit verschiedenen Neigungen aus, suche deren *Tangentenflächen* Δ auf und bestimme deren *Einhüllende* Φ ; die Fallinien von Φ werden dann in den Tangentialebenen ε von Ψ verlaufen, also eben sein“.

Das eingangs erwähnte Beispiel der *Müllerschen Schraubfläche* mit Parabeln als Fallinien ergibt sich dabei in folgender Weise: Man geht aus von einer *Schraubtorse* Ψ mit lotrechter Achse und verwendet als Böschungslinien p die auf Ψ verlaufenden *Schraublinien*; deren Tangentenflächen Δ sind dann wieder Schraubtorsen, die die genannte Schraubfläche einhüllen.

Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall einer *abwickelbaren Fläche* Φ : Hier erscheinen die berührenden Böschungstorsen Δ zu *Ebenen* abgeplattet, die je ∞^1 parallele Falltangenten enthalten. Die Gratlinien p sind mithin auf Fernpunkte zusammengeschrumpft, so daß

der zweite Brennflächenmantel der Falltangentenkongruenz von Φ zu einer *Fernkurve* ausartet, die eine *Gerade* sein muß, wenn die Falllinien eben sein sollen. Die Falltangenten von Φ verlaufen dann parallel zu den Strahlen eines (eentlichen) Büschels, woraus sich folgern läßt⁶, daß die Tangentialebenen Δ parallel zu jenen eines *Reyeschen Kegels* (7c) angeordnet sind. Sieht man ferner von der trivialen Lösung ab, die ein beliebiger *Horizontalzylinder* darstellt, so gilt also: „Die nicht-trivialen *Torsen mit ebenen Falllinien* sind jene, die einen *Reyeschen Richtkegel 2. Grades* mit lotrechter Fokalachse haben”.

In dem *Sonderfall*, daß die Ausgangstorse $\Psi(\varepsilon)$ zu einem *eentlichen Ebenenbüschel* $d(\varepsilon)$ ausgeartet ist, schrumpfen gleichfalls die Böschungslinien p auf Punkte der Büschelachse d zusammen und die Böschungstorsen Δ werden zu *Drehkegeln* mit lotrechter Achse: „Das Hüllgebilde einer einparametrischen Schar von Drehkegeln mit lotrechten Achsen, deren Spitzen auf einer Geraden liegen, ist eine Fläche mit ebenen Falllinien”.

Hier ordnen sich mit *waagrechter Spitzenlinie* d die oben betrachteten *Eckhartschen Flächen* 4. Ordnung mit Kegelschnitten als Falllinien ein. *L. Eckhart* war zu seiner Fläche (1) durch Transformation eines Ebenenbündels mittels einer speziellen „*axialen Ebenenverwandtschaft*” gelangt. Im übrigen läßt sich aber zeigen, daß auch bei Anwendung einer beliebigen axialen Ebenenverwandtschaft mit lotrechter Achse stets eine Fläche mit ebenen Falllinien entsteht, wobei deren Ebenen ein Büschel mit waagrechter Achse erfüllen; hierüber soll an gleicher Stelle zu einem späteren Zeitpunkt noch ausführlich berichtet werden⁷.

Die Frage nach *sämtlichen Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien* ist noch offen. Außer den in Abschnitt I erwähnten Schraub- und Spiralfächen und den in Abschnitt II beschriebenen algebraischen Flächen ist bisher nur noch ein weiteres nichttriviales Beispiel bekannt, und zwar eine metrisch ausgezeichnete *Römerfläche* mit Pascalschnecken als Schichtenlinien und Parabeln als Falllinien,⁴ deren Ebenen ein Büschel mit geneigter Achse bilden⁸.

⁷ Vgl. inzwischen den Auszug meines beim V. Österreichischen Mathematikerkongreß in Innsbruck im September 1960 gehaltenen Vortrags „*Axiale Ebenenverwandtschaften*”, veröffentlicht im Kongreßbericht, Nachr. Österr. Math. Ges. 66.

⁸ *Zusatz bei der Korrektur*: Die Frage konnte inzwischen erledigt werden. Es zeigte sich, daß nach Ausschluß der Gesimsflächen mit Kegelschnittprofil die Flächen mit elliptischen oder hyperbolischen Falllinien im wesentlichen durch die in Abschn. II behandelten Flächen repräsentiert werden, während die Flächen

IV. Differentialgleichung der Flächen mit ebenen Fallinien

Wir denken uns die (nichtabwickelbare) Fläche Φ als *Hüllgebilde ihrer Tangentialebenen*

$$x \cos u + y \sin u + z \cdot v^{-1} = h(u, v) \quad (13)$$

aufgefaßt; sie ist dann festgelegt durch die Funktion $h(u, v)$, wobei die Veränderliche u den Richtungswinkel der Schichtenlinien und v die Flächenneigung mißt. Eine Parameterdarstellung der Fläche ergibt sich nach partieller Ableitung von (13) in der Form

$$\begin{aligned} x &= (h + v h_v) \cos u - h_u \sin u, \\ y &= (h + v h_v) \sin u + h_u \cos u, \\ z &= -v^2 h_v. \end{aligned} \quad (14)$$

Eine Φ umschriebene *Böschungstorse* Δ wird durch $v = \text{const}$ gekennzeichnet. Für ihre *Gratlinie* p ergibt sich, mit u als Kurvenparameter, durch zweimalige Ableitung von (13) nach u die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= -h_u \sin u - h_{uu} \cos u, \\ y &= h_u \cos u + h_{uu} \sin u, \\ z &= (h + h_{uu}) v. \end{aligned} \quad (15)$$

Lassen wir nun auch v wieder variieren, so beschreibt (15) die *zweite Brennfläche* Ψ der *Falltangentenkongruenz* von Φ .

Soll nun die Fläche Φ *ebene Fallinien* haben, so muß, wie dargelegt wurde, Ψ eine *Torse* sein, und wir haben dementsprechend auszudrücken, daß die Flächenkrümmung von Ψ verschwindet. Zu diesem Zwecke berechnen wir auf Grund von (15) zunächst die Koeffizienten der II. Grundform, wobei es nur auf die Verhältnisse ankommt. Man findet

$$\begin{aligned} L : M : N &= (h + v h_v + h_{uu}) : h_{uv} : \\ &: \frac{(2 h_v + v h_{vv} + 2 h_{uv}) h_{uv} - (h + v h_v + h_{uu}) h_{uvv}}{h_u + h_{uu}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die in Rede stehende Bedingung

$$LN - M^2 = 0 \quad (17)$$

liefert dann für die Funktion $h(u, v)$ eine in den höchsten Ableitungen lineare *partielle Differentialgleichung dritter Ordnung*, deren Lösung in

mit parabolischen Fallinien eine viel ausgedehntere Familie bilden, deren Umfang jener der Böschungstorsen entspricht. — Vgl. *W. Wunderlich*: Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien. J. f. d. reine u. angew. Math. (im Druck).

Übereinstimmung mit den vorherigen geometrischen Betrachtungen von drei willkürlichen Funktionen abhängt: Die Annahme der Torse entspricht zwei solchen Funktionen, die Kennzeichnung einer einparametrischen Schar von Böschungslinien darauf — etwa durch ihre Hüllkurve — erfordert eine dritte.

XIth International Astronautical Congress. XI. Internationaler Astronautischer Kongreß. XI^e Congrès International d'Astronautique.

Stockholm 1960. Proceedings. In zwei Bänden. Die Abnahme des ersten Bandes verpflichtet zur Abnahme auch des zweiten Bandes. Volume I: **Main Sessions.** Edited by **Carl W. P. Reuterswärd.** Published by The Organizing Committee of the Congress. With 390 figures. XI, 714 pages. Gr.-8°. 1961. (58 Beiträge in englischer, 4 Beiträge in französischer und 4 Beiträge in deutscher Sprache.)

Full cloth S 996.—, DM 158.—, sfr. 170.—, \$ 39.50

Abonnenten der Zeitschrift "Astronautica Acta" sowie die Mitglieder der an die IAF (Internationale Astronautische Föderation) angeschlossenen Gesellschaften erhalten den Band zu einem um 20 Prozent ermäßigten Vorzugspreis.

Themen der Vorträge: Planetary Atmosphere Environments. Interplanetary Environment. Medicine. Navigation and Space Communications. Guidance and Control. Propulsion. Space Projects. Trajectories. Vehicles and Power Supplies. Economics.

Volume II: Small Sounding Rockets Symposium. Erscheint im Sommer 1961.

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow.

By **M. Z. v. Krzywoblocki**, Sc. D. (Lille), Ph. D. (Brooklyn), M. A. (Math., Stanford), M. S. (Appl. Math., Brown), M. Aer. En. (Brooklyn), Dipl.-Ing. (Lemberg), Professor, University of Illinois. With an Appendix by Dr. Ph. Davis and Dr. Ph. Rabinowitz, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards. Mit 3 Textabbildungen. X, 188 Seiten. 4°. 1960. (In englischer Sprache.)

Ganzleinen S 312.—, DM 52.—, sfr. 53.20, \$ 12.40

„... Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die Anwendungen der *Bergman*-schen Methode für den Praktiker, d. h. für den Hydro- und Aerodynamiker mit entsprechender theoretischer Vorbildung. Die Darstellung konzentriert sich deshalb auf praktisch wichtige Ergebnisse, unter Fortlassung vieler Beweise, für die dann jeweils auf die entsprechende Originalliteratur verwiesen wird. Eine derartige zusammenfassende Darstellung ist begrüßenswert, da die Originalarbeiten zahlreich und weitverstreut sind ...”

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

Konstruktive Geometrie in der Technik.

Von Dr. **Fritz Hohenberg**, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 459 Textabbildungen. IX, 319 Seiten. Gr.-8°. 1961.

Steif geheftet S 150.—, DM 25.—, sfr. 25.60, \$ 5.95

Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, \$ 6.90

Aus den Besprechungen zur 1. Auflage:

„... Lehrer der darstellenden Geometrie an Technischen Hochschulen und mittleren technischen Lehranstalten werden sich aus dem Buch viel Anregungen holen können; insbesondere ist es eine unerschöpfliche Fundgrube für die Gestaltung konstruktiver Übungen. Zweifellos wird das wertvolle Buch bald zu den bekanntesten Lehrbüchern der konstruktiven Geometrie gehören.”

Internationale Mathematische Nachrichten

Soeben erschien:

Kernreakortheorie

Eine Einführung

Von

S. Glasstone

und

M. C. Edlund

United States Atomic Energy Commission

Oak Ridge National Laboratory

Ins Deutsche übersetzt und bearbeitet von

Dr. W. Glaser

und

Dr. H. Grumm

weiland o. Professor an der Technischen Hochschule
Wien

Reaktor-Interessengemeinschaft
Reaktorabteilung der SGP, Wien

Mit 82 Textabbildungen. X, 341 Seiten. Gr.-8^o. 1961

Ganzleinen S 239.—, DM 38.—, sfr. 40.90, \$ 9.50

Der „Glasstone-Edlund“, wie man dieses Buch in Fachkreisen nennt, ist bereits ein klassisches Werk geworden. Von der 1952 erschienenen englischen Originalausgabe liegt heute der 7. Neudruck vor.

Durch das Erscheinen dieses Buches sind die friedlichen Aspekte der Kernenergie — bis dahin überlagert von militärischen Restriktionen — zum erstenmal in wissenschaftlich klarer und erstaunlich umfassender Weise freigelegt worden. Seit langem ist dieses Werk die wichtigste, allgemein zugängliche Quelle für die Fragen der Reaktortheorie. An ihm wurde eine ganze Generation von Reaktorphysikern und Kernenergetikern erzogen.

In der Zwischenzeit ist die Kerntechnik von der Theorie und vom Experiment fortgeschritten zum Groß-Kernkraftwerk. Trotz dieser stürmischen Entwicklung hat der „Glasstone-Edlund“ seinen Rang als eines der besten Lehrbücher gehalten, das für den fachlich interessierten Hochschüler, den Wissenschaftler, den Ingenieur in der Entwurfs- und Konstruktionsarbeit unentbehrlich ist.

Die vorliegende deutsche Ausgabe soll das Buch dem rasch wachsenden Interessentenkreis in den deutschsprachigen Ländern näherbringen. Im Einverständnis mit den Autoren der Originalausgabe wurden in der deutschen Bearbeitung neuere Entwicklungen, vor allem durch weiterführende Literaturhinweise, berücksichtigt.

Hauptabschnitte

Kernstruktur und Stabilität. Kernreaktionen. Erzeugung von Neutronen. Neutronenreaktionen. Der Spaltungsprozeß. Die Neutronendiffusion. Die Bremsung von Neutronen. Der homogene thermische Reaktor ohne Reflektor. Der homogene Reaktor mit Reflektor: die Gruppen-Diffusions-Methode. Heterogene (Natururan-)Reaktoren. Das Zeitverhalten eines nackten thermischen Reaktors. Reaktorregelung. Allgemeine Theorie homogener multiplizierender Systeme. Störungstheorie. Transport-Theorie und Neutronendiffusion. — Sachverzeichnis.